**Guía 8 de matemáticas**

**Christian Andres Martínez**

**Secciones cónicas**

Secciones Conicas. / Guía 8.

6.1 Resultado de las siguientes operaciones

$(x+5)^2+(y-3)^2$

$x^2+10x+25+y^2-6y+9$

$x^2+10x+34+y^2-6y$

Solución

$(x-4)^2-(y-2)^2$

Factorizando:

$(x-4-(y-2))\cdot(x-4+(y-2))$

$(x-4-y+2)\cdot(x-4+y-2)$

$(x-2-y)\cdot(x-6+y)$

Simplificando:

$x^2-8x+16-(y^2-4y+4)$

$x^2-8x+16-y^2+4y-4$

$x^2-8x+12-y^2+4y$

$\frac{(x+8)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}$ Simplificando:

$\frac{x^2+16x+64}{16}+\frac{y^2+6y+9}{9}$

$\frac{9(x^2+16x+64)+16(y^2+6y+9)}{144}$

$\frac{9x^2+16x+64+16y^2+6y+9}{144}$

$\frac{9x^2+144x+720+16y^2+96y}{144}$

Factorizando:

$$\frac{1}{144}\cdot\left(9(x+8)^2+16(y+3)^2\right)$$

$$\frac{1}{144}\cdot\left(9(x^2+16x+64)+16(y^2+6y+9)\right)$$

$$\frac{1}{144}\cdot(9x^2+144x+576+16y^2+96y+144$$

$$\frac{1}{144}\cdot(9x^2+144x+720+16y^2+96y)$$

$$\frac{(x-12)^2}{36}-\frac{(y-8)^2}{25}$$

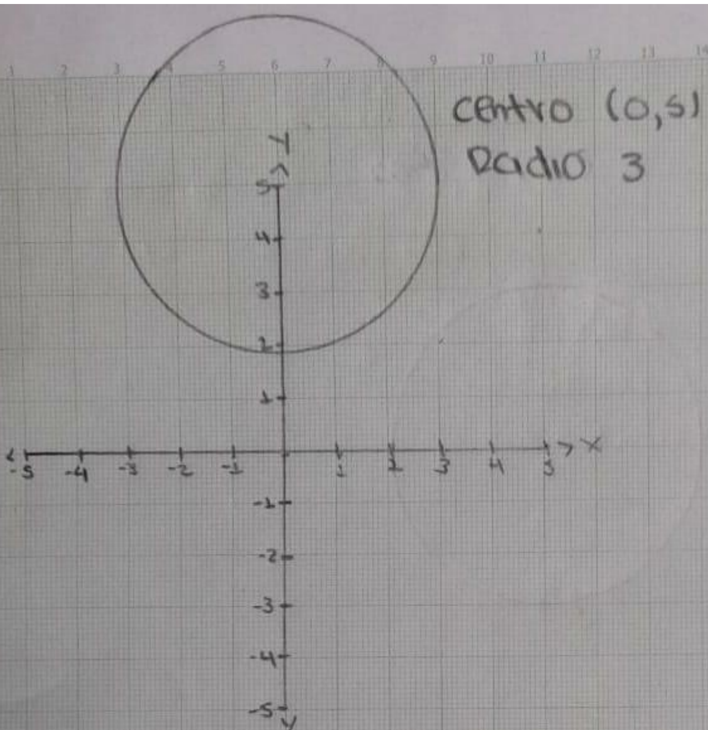
$$-\frac{(x-12)^2\cdot(y-8)^2}{900}$$

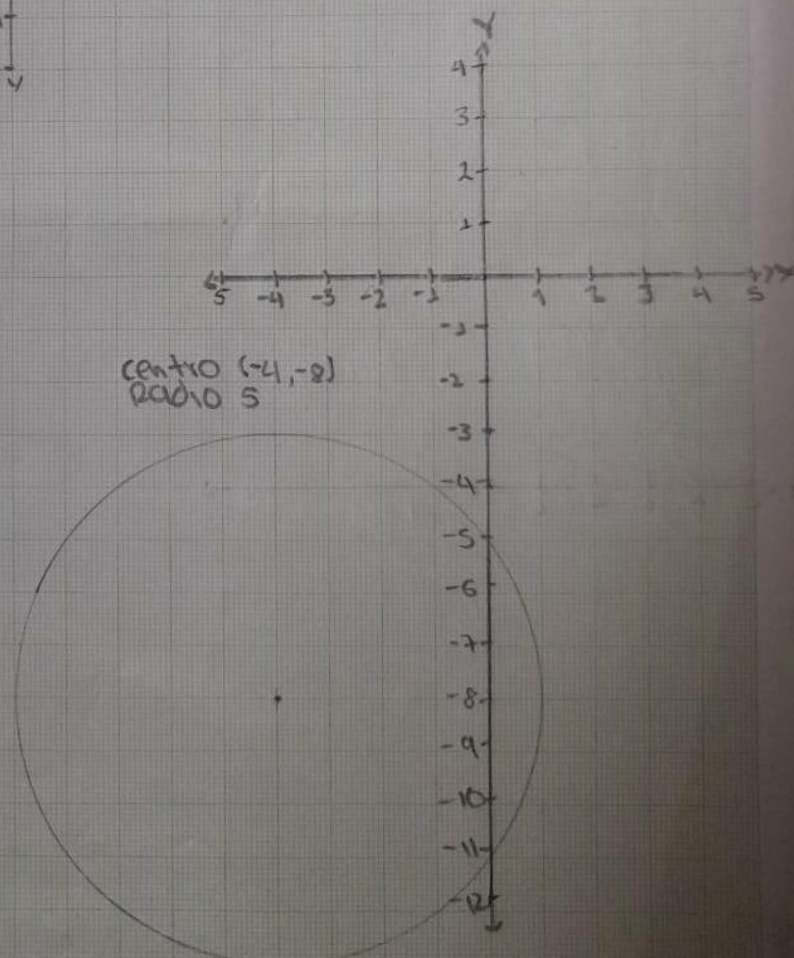
$$-\frac{((x-12)\cdot(y-8))^2}{900}$$

$$-\frac{(xy-8x-12y+96)^2}{900}$$

**6.2 Construye sobre el plano cartesiano:**

1. Una circunferencia de centro (0, 5) y radio 3 unidades.
2. Una circunferencia de centro (-4, -8) y radio 5 unidades


centro (0,5)
Radio 3


centro (-4,-8)
Radio 5

**7.1:**

## Qué es una circunferencia

La circunferencia es una curva plana y cerrada tal que todos sus puntos están a igual distancia del centro. Distíngase de círculo, cuyo lugar geométrico queda determinado por una circunferencia y la región del plano que encierra esta.

## Como se identifica

Una circunferencia es exterior a otra, si todos sus puntos son exteriores a esta otra.

Una circunferencia es interior a otra, si todos sus puntos son interiores a esta otra.

Una circunferencia es circundante a otra, si todos sus puntos no son interiores a esta otra que a su vez no es exterior a la primera.

Una circunferencia es tangente exterior a otra, si tienen un único punto común y todos los demás puntos de una son exteriores a la otra.

Una circunferencia circundante es tangente exterior a otra, si tienen un único punto común.

Una circunferencia es tangente interior a otra, si tienen un único punto común y todos los demás puntos de una son interiores a la otra.

Una circunferencia es secante a otra, si se cortan en dos puntos distintos.

Una circunferencia es secante ortogonalmente a otra, si el ángulo de su intersección es recto, es decir, sus rectas tangentes en cada una de las intersecciones son perpendiculares.

## Cuáles son sus elementos

El centro es el punto equidistante a todos los puntos de una circunferencia. Señalado con el nombre C en la figura.

Un radio es cualquier segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. El radio también es la longitud de los segmentos del mismo nombre. Señalado con el nombre r en la figura.

Un diámetro es cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por su centro. El diámetro también es la longitud del segmento del mismo nombre. Señalado con el nombre d en la figura.

El perímetro es el contorno de la circunferencia y su longitud. Señalado con el nombre L en la figura.

Una cuerda es cualquier segmento que une dos puntos de una circunferencia. El diámetro es una cuerda de máxima longitud. Segmento verde en la figura.

Un arco es cualquier porción de circunferencia delimitada por dos puntos sobre esta. Se dice también que una cuerda subtiende cada arco que determinan sus extremos. Línea curva azul en la figura.

Una flecha o sagita respecto una cuerda es el segmento de su mediatriz que hay entre esta cuerda y el arco que determina esta, sin pasar por el centro. Segmento rojo en la figura.

Una semicircunferencia es cualquier arco delimitado por los extremos de un diámetro.

**Como se construye**

Se construyen los segmentos AB y BC

Se trazan las mediatrices m y n de AB y BC respectivamente.

El punto de corte O de m y n cumple la propiedad de estar a la misma distancia de los tres puntos A, B y C. (Propiedad de la mediatriz).

El punto O es el centro de la circunferencia y el radio r = distancia OA = distancia OB = distancia OC

**7.2:**

## Que es una elipse

Una elipse es una curva plana, simple y cerrada con dos ejes de simetría que resulta al cortar la superficie de un cono por un plano oblicuo al eje de simetría con ángulo mayor que el de la generatriz respecto del eje de revolución.

## Como se identifica

Si el plano intersecta una de las piezas del cono y su eje pero esté no es perpendicular al eje, la intersección será una elipse.

## Cuáles son sus elementos

Focos: Son los puntos fijos F y F'.

2Eje focal: Es la recta que pasa por los focos.

3Eje secundario: Es la mediatriz del segmento FF'.

4Centro: Es el punto de intersección de los ejes.

5Radios vectores: Son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: PF y PF'.

6Distancia focal: Es el segmento de longitud 2c, c es el valor de la semidistancia focal.

7Vértices: Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: A, A', B y B'.

8Eje mayor: Es el segmento de longitud 2a, a es el valor del semieje mayor.

9Eje menor: Es el segmento de longitud 2b, b es el valor del semieje menor.

10Ejes de simetría: Son las rectas que contienen al eje mayor o al eje menor.

11Centro de simetría: Coincide con el centro de la elipse, que es el punto de intersección de los ejes de simetría.

## Como se construye

Dibujamos dos circunferencias de diámetros iguales a los ejes de la cónica y centro en O. Trazamos varios diámetros comunes a ambas circunferencias.

Por los puntos de intersección de estos diámetros con la circunferencia mayor (Circunferencia Principal) (ej.: x), trazamos normales al eje mayor.

Trazamos normales al eje menor donde estos diámetros corten a la circunferencia de radio menor (ej: y).

Las intersecciones correspondientes entre sí (X-P1 y Y- P1) de estas perpendiculares trazadas determinan puntos de la elipse (P1, P2, P3, P4).

La construcción se basa en la afinidad existente entre la circunferencia de radio mayor y la elipse, donde el eje de afinidad coincide con el mayor de la elipse y la dirección de afinidad es normal a este.

-Método de construcción por puntos (Intersección de radios vectores)

Dibujados los ejes y determinados los focos, situamos arbitrariamente puntos entre uno de los focos y el centro de la elipse sobre el eje mayor (1, 2, 3, etc.).

Con radios A-1 y B-1 trazamos 4 arcos de circunferencia de centros F1 y F2.

La circunferencia de centro F1 y radio A-1 y la de centro F2 y radio B-1 se cortan en dos puntos de la elipse. Obtenemos dos puntos más con arcos de igual radio, pero centros alternativos (F2 para A-1 y F1 para B-1), simétricos de los anteriores respecto a los ejes de la elipse.

Con radios A-2 y B-2 procedemos de igual modo y así sucesivamente con el resto de los puntos trazados entre el foco y el centro de la elipse.

Uniendo A, B, C y D, extremos de los ejes que son también puntos de la elipse, con los puntos obtenidos mediante plantilla de curvas, obtenemos el trazado de la elipse.

**7.3:**

**Que es una parábola**

Se denomina parábola al lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que equidista de una recta fija, llamada directriz y de un punto fijo en el plano, que no pertenece a la parábola ni a la directriz, llamado foco. se pueden hallar tantos puntos de la parábola como sea necesario.

**Como se identifica**

-En las ecuaciones se trabaja con X y Y.

Si la parábola tiene x^2 positiva, abre hacia arriba, si tiene -x^2 negativa abre hacia abajo.

Si la parábola tiene y^2 positiva, abre hacia el lado derecho, si tiene -y^2 negativa abre hacia el lado izquierdo.

El eje de simetría es perpendicular a la directriz.

Se debe hallar la distancia (p) entre foco, vértice y directriz. Con las siguientes fórmulas.

x^2=4py Si la parábola abre hacia arriba.

x^2=-4py Si la parábola abre hacia abajo.

y^2=4px Si la parábola abre hacia la derecha.

y^2=-4px Si la parábola abre hacia la izquierda.

El vértice, la directriz y el foco tienen la misma distancia.

El vértice es el punto medio entre el foco y la directriz.

Igualmente se usa el discriminante para determinar si toca o no el eje X.

**Cuáles son sus elementos**

1 Foco: Es el punto fijo F.

2 Directriz: Es la recta fija d.

3 Parámetro: Es la distancia del foco a la directriz, se designa por la letra p.

4 Eje: Es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.

5 vértice: Es el punto de intersección de la parábola con su eje.

6 Radio vector: Es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con el foco.

**Como se construye**

Paso 01:

Si tenemos el vértice (“V”) y el foco (“F”) de la parábola podemos obtener la directriz (“D”) que nos servirá de guía para encontrar los otros puntos. Su distancia es equidistante al foco respecto al vértice y perpendicular.

Paso 02.1:

Marcamos una recta (“r”) perpendicular cualquiera que partirá del vértice y alejándose de la directriz.

La distancia entre la recta (“r”) y la directriz (“D”) es la medida del radio que tiene como centro el foco (“F”)

El punto donde corte el arco con la recta (“r”) será uno de los puntos de la parábola.

Paso 02.2:

Continuamos con el proceso en el que el radio que parte del foco (“F”) tiene el mismo tamaño que la distancia entre la recta (“r”) que vayamos dibujando aleatoriamente y la directriz (“D”)

Paso 03:

Una parábola continua su recorrido de forma infinita hasta alcanzar su límite.

Una vez obtenidos los puntos suficientes (cuantos más, mejor definida), procedemos a unirlos.

**7.4:**

## Que es una hipérbola

Una hipérbola es una curva abierta de dos ramas, obtenida cortando un cono recto mediante un plano no necesariamente paralelo al eje de simetría, y con ángulo menor que el de la generatriz respecto del eje de revolución. En geometría analítica, una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es igual a la distancia entre los vértices, la cual es una constante positiva.

## Cuáles son sus elementos

### Eje transversal o transverso

Se le denomina al segmento rectilíneo donde se encuentran los focos y los vértices de la hipérbola. Su valor es 2a y es perpendicular al eje conjugado.

### Eje conjugado o imaginario

Es el segmento rectilíneo que pasa por el centro de la hipérbola y que es perpendicular o normal al eje transversal y cuya longitud es de 2b

### Eje focal

Es el segmento rectilíneo cuyos extremos son los focos de la hipérbola y cuya longitud es de 2c. Este eje es colineal con el eje transversal.

### Asíntotas

Son las rectas que se intersecan en el centro de la hipérbola y se acercan a las ramas al alejarse estas del centro de la hipérbola.

Las asíntotas de las hipérbolas representadas por las ecuaciones y son expresadas, respectivamente, igualando estas a cero

### Vértices

Los vértices de una hipérbola son los puntos que son los extremos de su eje transversal.

### Focos

Son dos puntos, F1 y F2, respecto de los cuales permanece constante la diferencia de distancias (en valor absoluto) a cualquier punto x de dicha hipérbola.

Centro

Punto medio de los vértices y de los focos de la hipérbola.

Tangentes

La tangente a una hipérbola en cualquier punto de la curva es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.

**Como se construyen**

-Partimos de la base en que tenemos definidos los dos focos y un punto en el espacio por el que debe pasar la hipérbola.

-La sustracción de la longitud que va de un punto cualquiera de la hipérbola a cada uno de los focos da como resultado sus vértices

-Para encontrar los distintos puntos de la hipérbola podemos definir como referencia recta donde variaremos la longitud de los radios para encontrar los puntos en el espacio.

-Definimos una longitud cualquiera mayor que la longitud de la resta de los dos radios y tomamos como centros los focos

-Continuamos encontrando los puntos geométricos de la hipérbola a partir de las intersecciones entre los radios de sus focos para definir la figura.

-Una vez obtenidos los puntos necesarios, los unimos, cuantos más puntos encontremos mejor definida.

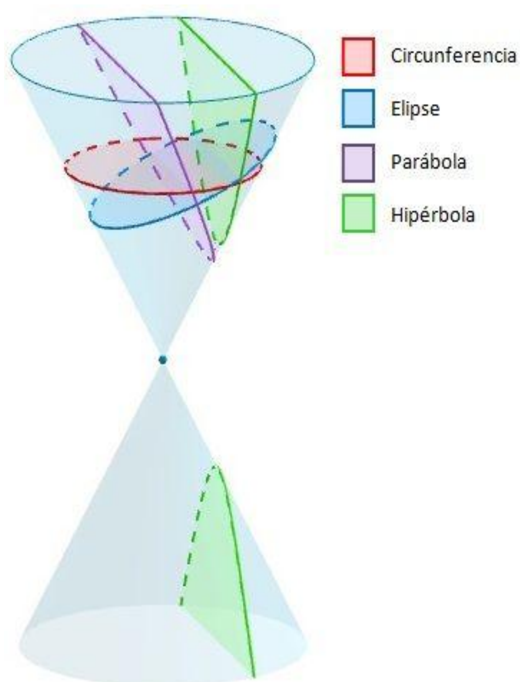
-La hipérbola tiene dos partes simétricas denominadas brancas situadas de forma equidistantes respecto a su eje y se expanden indefinidamente tomando como límite sus asíntotas.

**7.5:**

**Diversas aplicaciones de cada una de las secciones cónicas**

Elipse: Según la 1ª ley de Kepler, descrita por el famoso astrónomo en 1609, las trayectorias de las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas, siendo el Sol uno de sus focos.

Parábola: Gracias a su forma de parábola, las antenas parabólicas tienen la propiedad de reflejar hacia su foco todos los rayos paralelos de las ondas que recibe. De esta forma puede concentrar toda la señal que recibe su superficie en un solo punto.




Hipérbola: Un cometa que es atraído por el Sol desde fuera del Sistema Solar describe una trayectoria hiperbólica, siendo el Sol un foco. Al aproximarse al Sol, saldrá del Sistema Solar describiendo nuevamente una hipérbola.

La circunferencia: Es un caso particular de elipse, donde el plano de corte al cono es paralelo a su base. Las cónicas están muy presentes en nuestro día a día. Las antenas parabólicas, la forma hiperbólica de muchas chimeneas de evaporación de las centrales nucleares y térmicas, la forma circular de los dvds, el telescopio que utiliza las propiedades reflectantes de la parábola, etc. Estas y muchas más son las aplicaciones del increíble mundo de las cónicas.