



NOMBRE COMPLETO: Eliana Gabriela Rengifo Cardozo			
GRADO: Once	ASIGNATURA: Matemáticas	GUÍA 6	Periodo: 2

FACTOR: Pensamiento Variacional y sistemas algebraicos y analíticos	NIVEL DE DESEMPEÑO: Superior
--	-------------------------------------

TEMA: CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES
FUNCIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES

Definiciones:

FUNCIONES POLINÓMICAS: Una función polinómica f es una función cuya expresión es un polinomio tal como:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

FUNCIONES RACIONALES: Una función f es racional si es de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x)$ es diferente a cero.

Propósitos:

- ✓ Identificar funciones polinómicas y racionales
- ✓ Modelar fenómenos por medio de funciones polinómicas y racionales

Recursos bibliográficos:

<https://www.universoformulas.com/matemáticas/analisis/funcion-polinomica/c>
https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matemáticas/calculo/funciones/funcion-lineal-y-funcion-identidad.html#tema_funcion-identidad
<https://epja.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/43/2016/04/GuiaN2MatematicaII CicludeEM.pdf>
https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/rational-functions
<https://www.neurochispas.com/wiki/aplicaciones-de-las-funciones-racionales/>
Autores varios, Matemáticas vamos a aprender 11. Editorial SM. Bogotá. 2017
Ortiz Ludwig, Armas Ricardo, Ramírez Marisol & et. Caminos del Saber 11. Editorial Santillana S.A. Bogotá. 2013

ORIENTACIONES PARA RESOLVER LA GUÍA

El desarrollo de la guía debe realizarse en hojas cuadrículadas, con letra clara y legible. ¡Ojo! No se trata de transcribir el material, simplemente se registrarán las preguntas y respuestas en cada una de las actividades propuestas. Las guías se deben resolver en el cuaderno con letra legible, para que al momento de tomar la foto se vea la letra.

CRONOGRAMA: Para el desarrollo de las actividades propuestas se recomienda el siguiente cronograma:

FECHAS	ACTIVIDADES
DEL 21 al 28 DE JULIO	Actividad 1
DEL 29 DE JULIO AL 09 DE AGOSTO	Actividad 2
DEL 09 DE AGOSTO AL 16 DE AGOSTO	Actividad 3 Y 4

NOTA: LA GUÍA TAMBIÉN SERÁ PUBLICADA EN LAS PLATAFORMAS SIPNASIS Y COLEGIOS ON LINE

MOTIVACIÓN:

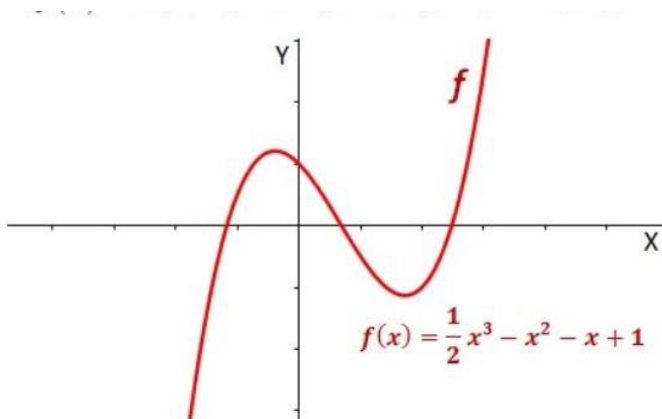
Esto que vas a aprender ¿Para qué te sirve?

Las funciones permiten modelar diferentes comportamientos de crecimiento y decrecimiento de variables que se relacionan entre sí. Por ejemplo, sirven para modelar el comportamiento del coronavirus en una población determinada, esto permitirá tomar las medidas necesarias para disminuir el contagio.



EXPLICACION:

FUNCIÓN POLINÓMICA



CARACTERÍSTICAS

El dominio de las funciones polinómicas son todos los números reales.

Las funciones polinómicas son continuas en todo su dominio.

Se llama grado de una función polinómica al mayor exponente de sus términos. Por ejemplo, el polinomio de la función del gráfico de arriba es de grado 3.

Los diferentes **a** (**a₀**, **a₁**, ...**a_n**), son números reales llamados **coeficientes de un polinomio**.

En la de la grafica el grado de la función es 3, ya que es el exponente mayor y el coeficiente es 1 ya que es el termino que no esta acompañado de una letra, es decir es independiente.

Las funciones polinómicas se dividen según el grado en primer grado, segundo grado, tercer grado, etcétera.

Funciones de primer grado: Las cuales son aquellas que el exponente de las letras es uno. Estas se sub dividen en:

- a) **Funciones afines:** son funciones de primer grado que no pasan por el origen, es decir, la ordenada no es nula ($b \neq 0$): $f(x) = mx + b$
- b) **Funciones lineales:** son funciones polinómicas de grado 1 tales que la ordenada es nula ($b = 0$), de manera que: $f(x) = mx$, Su gráfica es una recta que:
 - Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.
 - Para su representación son necesarios al menos dos puntos.
- c) **Funciones identidad:** es un caso particular de funciones lineales, tal que a cada elemento x le hace corresponder éste mismo valor en $f(x)$. Es decir, $m = 1$ y $b = 0$: $f(x) = x$, Su gráfica es una recta que.
 - Pasa por el origen de coordenadas
 - Tiene de pendiente: $m = 1$
 - Forma con la parte positiva del eje de abscisas un ángulo de 45°



función lineal: La función lineal se define por la ecuación $f(x) = mx + b$ ó $y = mx + b$ llamada ecuación canónica, en donde m es la pendiente de la recta y b es el intercepto con el eje Y .

Ejemplo de función lineal con sus partes

Función lineal $Y = 3x + 2$, vemos que $m = 3$ y $b = 2$ (de la forma $y = mx + b$) Este número m se llama pendiente de la recta y es la relación entre la altura y la base, aquí vemos que por cada unidad recorrida en x la recta sube 3 unidades en Y por lo que la pendiente es $m = 3$.

Ahora veremos una forma sencilla de graficar la función $Y = 3x + 2$, para ello realizamos una tabla de valores así:

X	-2	-1	0	1	2	2/3
Y	-4	-1	2	5	8	0

Cuando $x = -2$ Cuando $x = -1$

$$Y = 3(-2) + 2$$

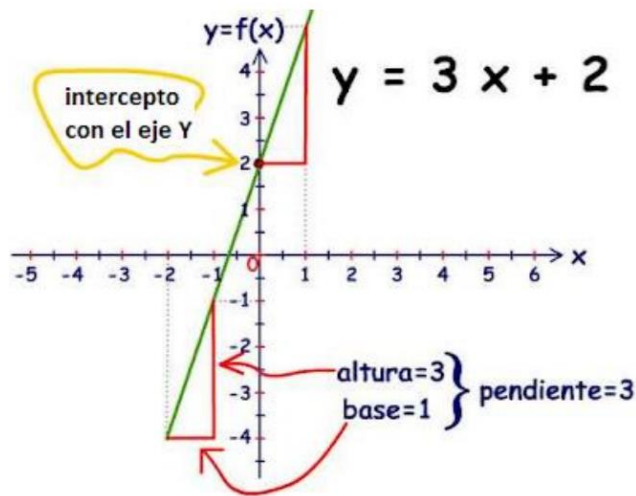
$$Y = 3(-1) + 2$$

$$Y = -6 + 2 = -4$$

$$Y = -3 + 2 = -1$$

Así sucesivamente se van reemplazando los valores en x y se halla Y

Con los valores de la tabla se realiza la gráfica quedando así:



APLICABILIDAD DE LA FUNCION LINEAL EN ADMINISTRACIÓN FINANCIERA

Costo Fijo También denominado gastos generales, es la suma de todos los costos que son independientes del nivel de producción, como rentas, seguros, entre otros. Este costo debe pagarse independientemente de que se produzca o no.

Costo Variable Este tipo de costo es la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción, como salarios y materiales. Se establece como el producto del número de artículos producidos y el costo de producción de cada artículo.

Costo Total Para poder establecer el costo total, debemos conocer el costo fijo y costo variable. Se representa como la suma del costo fijo y el costo variable.

Ingreso Total El ingreso es el dinero que un fabricante recibe por la venta de su producción. Se establece como el producto del número de artículos vendidos y el precio de venta por cada artículo.

Ganancia También se le denomina utilidad. Es la diferencia entre el ingreso y el costo total.



Punto de Equilibrio Es el nivel de ventas con el que los ingresos totales son iguales a los costos totales y la utilidad es cero.

EJEMPLO

Una señora va a vender empanadas en su casa para poder mejorar el ingreso de dinero en su hogar en esta época de pandemia, para eso ella hizo las siguientes cuentas:

Costo Fijo: para hacer las empanadas mensualmente ella debe pagar en promedio \$100.000 de servicios y otros costos internos, necesarios para hacer las empanadas.

Costo Variable: después de hacer las cuentas, la señora calcula que necesita de \$400 en materia prima, empackado y transporte por cada empanada que hace.

Ingreso Total: Precio de venta de las empanadas (\$1000 cada una) multiplicado por la cantidad de empanadas vendidas.

En este punto la señora necesita saber cuántas empanadas debe vender para que cubra los gastos y a partir de ahí poder empezar a tener ganancias, es decir necesita saber **El Punto de Equilibrio**, para ello se deben igualar el ingreso total y los costos totales.

Veamos las ecuaciones lineales que se tienen:

Costo total: $Y = 400 \cdot X + 100.000$ aquí la Y corresponde al costo total en pesos por producir las empanadas y la X a la cantidad de empanadas que se van a hacer.

Ingreso total: $Y = 1000 \cdot X$ en este caso la Y corresponde al total del dinero que se recibe por vender las empanadas y la X a la cantidad de empanadas vendidas (1000 es el precio que la señora le pone a sus empanadas para venderlas).

Para conocer el **punto de equilibrio**, se deben igualar las funciones lineales de ingreso total y costo total de la siguiente manera:

$$\text{Ingreso Total} = \text{Costo total}$$

$$Y = 1000 x$$

$$Y = 400x + 100.000$$

Para igualar las funciones solo se debe tomar el lado izquierdo de cada función, es decir:

$$1000 x = 400x + 100.000 \text{ de aquí se despeja } x, \text{ para ello se dejan los términos de } x \text{ para el lado izquierdo así:}$$

$$1000x - 400x = 100.000$$

$$600x = 100.000$$

$$X = \frac{100000}{600}$$

$$X = 166,67 \text{ se aproxima a } 167.$$

Lo anterior quiere decir que la señora debe vender como mínimo 167 empanadas para poder cubrir sus gastos. Se puede observar gráficamente en el punto donde se cruzan las dos funciones en la imagen que aparece a continuación.

Para realizar la gráfica se toma las ecuaciones lineales planteadas:

Ingreso total:

$$Y = 1000 x$$

Se halla para cuando $x = 0$ y $y = 0$ (0,0)

Cuando $x = 167$ se remplacea y se obtiene que $Y = 167000$ (167, 167000)

Costo total:

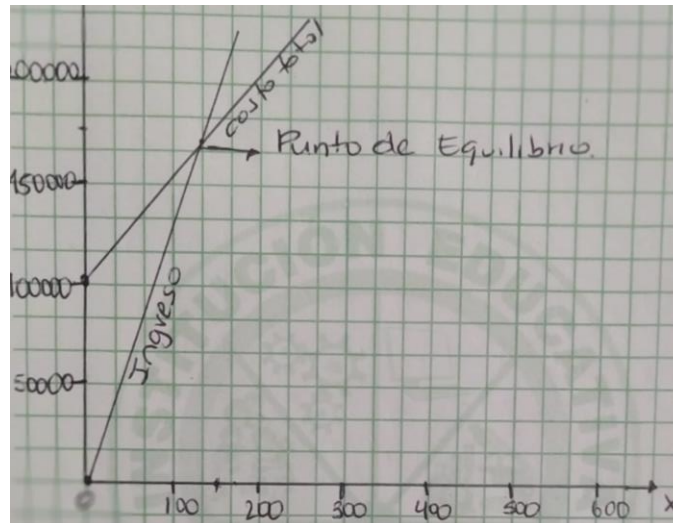
$$Y = 400x + 100.000$$

Se halla para cuando $x = 0$, entonces $Y = 100.000$ (0,100.000)

Cuando $x = 167$ se remplacea y se obtiene que $Y = 400(167) + 100.000 = 166800$ (167, 166800)



Se ubican las parejas ordenadas en el plano cartesiano y se realiza la gráfica:



CONCLUSIÓN.

A partir del momento en que la señora vende más de 167 empanadas, comenzará a tener ganancias.

2.Funciones de segundo grado: Función cuadrática

Toda función cuadrática se puede representar gráficamente mediante una parábola que es una curva que tiene una forma de u que abre ya sea hacia arriba o hacia abajo dependiendo del signo del término cuadrático de la expresión cuadrática. El punto que determina la concavidad de la curva es conocido como el vértice que es el lugar donde la parábola cruza su eje de simetría.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

“Para recordar”

Para graficar una expresión cuadrática se hace necesario realizar el siguiente proceso:

1. calcular el vértice de dicha función para ello se halla la abscisa y la ordenada respectivamente mediante las expresiones siguientes:

$$x = -\frac{b}{2a} \quad y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

El vértice es el punto de coordenadas V(x,y)

2. elaborar una tabla de valores que tenga por lo menos 5 valores para el eje x. preferiblemente que tenga parte de números negativos y parte de números positivos. No obstante, la escogencia de los mismos es de manera independiente.

X	-2	-1	0	1	2
Y					

3. sustituir los valores de x escogidos en la función cuadrática característica que se está trabajando y consignar dichos valores en la tabla (espacios en blanco) que son los valores de las ordenadas de la función.

4. obtenidos estos resultados se procede a graficar la función en el plano cartesiano donde se ubican no solo los valores de la tabla, sino que adicional a ello se ubica el vértice que es el punto clave de la gráfica.

Veamos un ejemplo para comprender lo que se está expresando en los numerales anteriores.



Graficar la función cuadrática:

$$f(x) = y = 2x^2 + 5x + 1$$

1. cálculo del vértice

$$2x^2 + 5x + 1$$

Implica que $a=2$, $b=5$ y $c=1$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2(2)} = -\frac{5}{4}$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(2)(1) - (5)^2}{4(2)} = \frac{8 - 25}{8} = -\frac{17}{8}$$

Luego el vértice es $V(-\frac{5}{4}, -\frac{17}{8})$

2. tabla de valores

X	-2	-1	0	1	2
Y	-1	-2	1	8	14

3. cálculo de las ordenadas

$$f(x) = y = 2x^2 + 5x + 1$$

$$f(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) + 1 = 2(4) + 5(-2) + 1 = 8 - 10 + 1 = 9 - 10 = -1$$

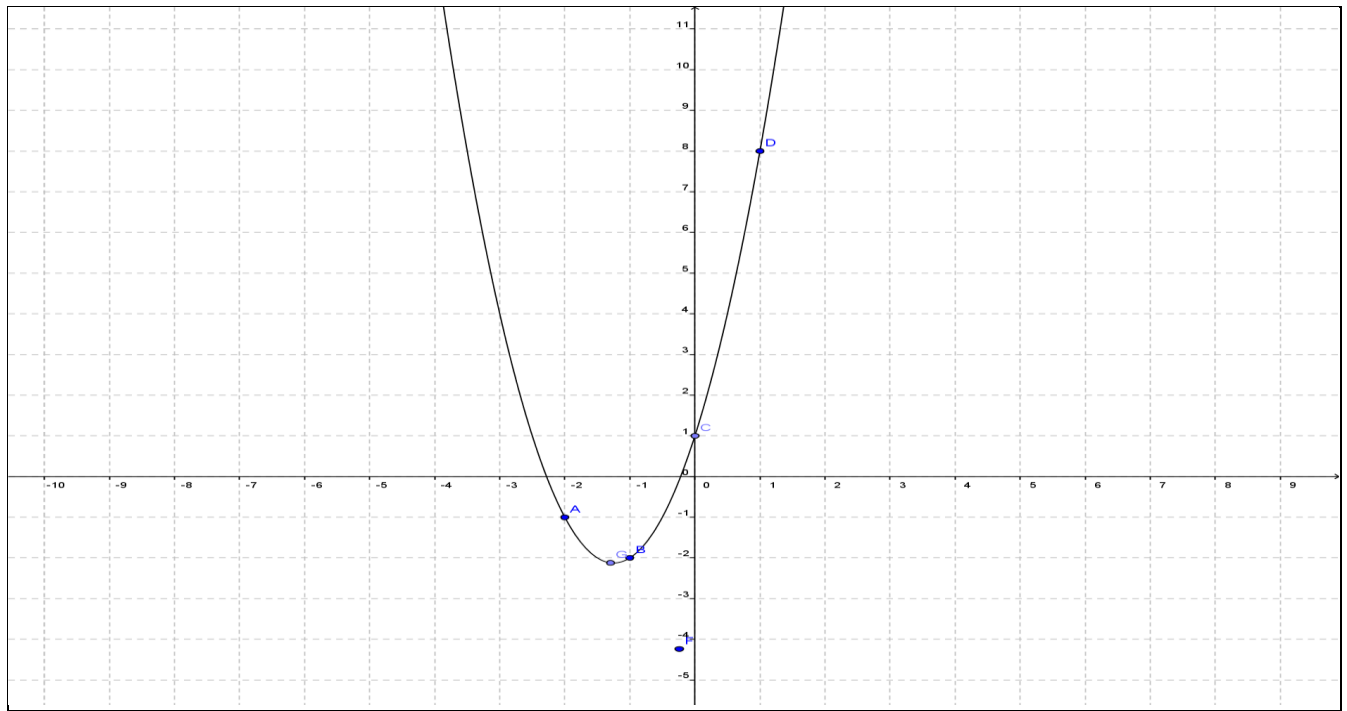
$$f(-1) = 2(-1)^2 + 5(-1) + 1 = 2(1) + 5(-1) + 1 = 2 - 5 + 1 = 3 - 5 = -2$$

$$f(0) = 2(0)^2 + 5(0) + 1 = 2(0) + 5(0) + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = 2(1)^2 + 5(1) + 1 = 2(1) + 5(1) + 1 = 2 + 5 + 1 = 8$$

$$f(2) = 2(2)^2 + 5(2) + 1 = 2(4) + 5(2) + 1 = 8 + 5 + 1 = 14$$

4. Grafica de la función



https://www.youtube.com/watch?v=gnAdna_tLK0&ab_channel=DanielCarre%C3%B3n

ACTIVIDAD UNO

1. Determina cuál de las siguientes funciones son polinómicas y hallar el grado y termino independiente.

a. $f(x) = 7$

b. $f(x) = 4x^2$

c. $f(x) = -4x^{\frac{1}{2}} + 3x^2$

d. $f(x) = 2(x^3 - 4x^5 + 1)$



2. Determina cual de las siguientes gráficas corresponden a una función polinómica

a.

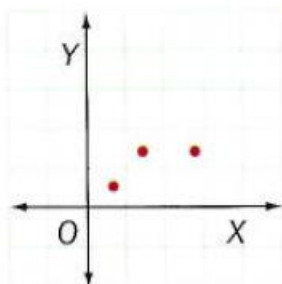


Figura 2.22

b.

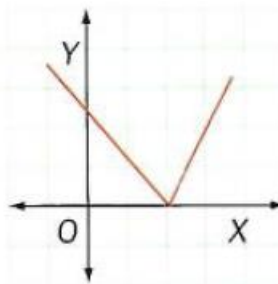


Figura 2.23

c.

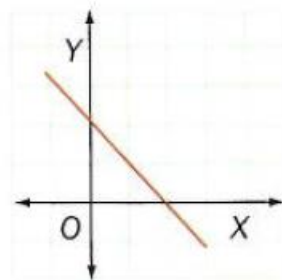


Figura 2.24

d.

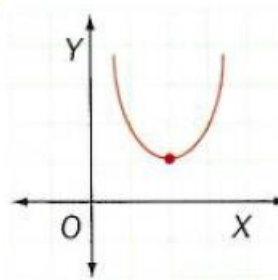


Figura 2.25

3. Graficar las siguientes funciones y determinar si son idénticas, afines o lineales:

- a) $f(x) = 2x + 5$
- b) $f(x) = 3x$
- c) $F(x) = 4$

4. Con base en el ejemplo de las empanadas, el estudiante debe diseñar un plan de inversión con una estructura similar (no debe usar el mismo ejemplo de la empresa de empanadas, debe usar un negocio diferente), construyendo la estructura de costos e ingresos con las ecuaciones de Costos totales e Ingresos totales y finalmente de la misma manera en que se realiza en el ejemplo, hallar El Punto de Equilibrio para saber a partir de que volumen de ventas podrá empezar a tener Ganancias. Deben entregarse todos los cálculos realizados de la manera en que se muestra en el ejemplo y también debe realizarse la gráfica completa, detallando cada elemento en ella, así como aparece en la imagen del ejemplo (la gráfica puede realizarse a mano)

5. Graficar las siguientes funciones cuadráticas, calculando el vértice y realizando una tabla de valores que sirvan de base para elaborar una gráfica adecuada.

- a) $y = 2x^2 + 5x + 1$
- b) $y = x^2 + 3x - 18$

APLICABILIDAD DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS

EJEMPLO 1

Una tenista lanza una pelota que sigue una trayectoria dada por la formula $y = 8t - t^2 + 1,6$ donde t es el tiempo (en segundos) transcurrido desde el Lanzamiento y Y es la altura (en metros) a la que se encuentra la pelota.

a) ¿A qué tipo de gráfica corresponde la trayectoria que describe la formula?



b) ¿Cuándo alcanzara la pelota su máxima altura y en tiempo en alcanzarla?

c) ¿Cuál es la altura que alcanza a los dos segundos de vuelo?

Respuesta:

a) El tipo de gráfica es una parábola ya que x tiene exponente 2.

b) Para hallar la altura máxima que alcanza la bola de tenis se debe calcular, se debe calcular el vértice

En donde Y será la máxima altura) y x el tiempo en que alcanza esa máxima altura

$$\begin{aligned} y &= -t^2 + 8t + 1,6 \\ x &= \frac{-b}{2a} \quad a = -1 \quad b = 8 \quad t = 1,6 \\ x &= \frac{-8}{2(-1)} = \frac{-8}{-2} = 4 \text{ segundos} \\ y &= \frac{4ac - b^2}{4a} \\ y &= \frac{4(-1)(1,6) - (8)^2}{4(-1)} \\ y &= \frac{-6,4 - 64}{-4} = 17,6 \text{ m} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la altura máxima es 17,6 metros y la alcanza a los 2.5 segundos.

c) Para calcular la altura que alcanza a los dos segundos se reemplaza en la ecuación el tiempo así:

$$\begin{aligned} y &= -t^2 + 8t + 1,6 \\ y &= -(2)^2 + 8(2) + 1,6 \\ y &= -4 + 16 + 1,6 \\ y &= 13,6 \text{ m} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la altura que alcanza a los dos segundos de vuelo es 13.6 metros

EJEMPLO 2

Los ingresos y los gastos de una empresa durante los 8 primeros años vienen definidos en miles de millones de pesos por las siguientes funciones cuadráticas:

$$\begin{aligned} \text{Ingresos: } I(t) &= \frac{-t^2}{4} + \frac{5t}{2} + 2. \\ \text{Gastos: } G(t) &= \frac{t^2}{6} - \frac{5t}{2} + \frac{31}{3} \end{aligned}$$

a) Halla los momentos en que los ingresos y los gastos se igualan.

b) ¿Cuándo son máximos los ingresos?

c) ¿Cuándo son mínimos los gastos?

RESPUESTA:



a) Para hallar los momentos en que son iguales los ingresos y los gastos se igualan las ecuaciones así:

$$\begin{aligned} -\frac{t^2}{4} + \frac{5t}{2} + 2 &= \frac{t^2}{6} - \frac{5t}{2} + \frac{31}{3} \\ -\frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{6} + \frac{5t}{2} + \frac{5t}{2} &= \frac{31}{3} - \frac{2}{1} \\ \frac{-6t^2 - 4t^2}{24} + \frac{10t}{2} &= \frac{31-6}{3} \\ \frac{-10t^2}{24} + 5t &= \frac{25}{3} \\ \frac{-10t^2}{24} + 5t - \frac{25}{3} &= 0 \end{aligned}$$

Una vez obtenida la ecuación cuadrática: $\frac{-10}{24}t^2 + 5t - \frac{25}{3} = 0$ Se halla la t, para ello se aplica la fórmula de la ecuación cuadrática así:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DONDE:

$$a = -10/24 = -0.42 \quad b = 5 \quad c = -25/3 = -8.33$$

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(-0.42)(-8.33)}}{2(-0.42)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 13.9944}}{-0.84}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{11}}{-0.84}$$

$$X1 = \frac{-5 + 3.32}{-0.84}$$

$$X2 = \frac{-5 - 3.2}{-0.84}$$

$$X1 = 2$$

$$X2 = 10$$

A los 2 y 10 años los ingresos y gastos son iguales.

b) Para hallar el tiempo en el que ingreso es máximo se calcula x. Así:



$$X = \frac{-b}{2a} = \frac{-5/2}{2(-1/4)}$$
$$X = \frac{-5/2}{-1/2} = \frac{20}{4} = 5 \text{ años}$$

Los ingresos son máximos a los 5 años

- a) c) Para hallar el tiempo en que los gastos son mínimos se debe calcular el vértice: El valor de x es el tiempo:

$$X = \frac{-b}{2a}$$
$$X = \frac{-(-5/2)}{2(1/6)}$$
$$X = \frac{5/2}{1/3} = \frac{30}{4} = 7.5 \text{ años}$$

Los gastos son mínimos a los 7.5 años

EJEMPLO 3

Un contador determina que el ingreso mensual I, en pesos, que obtiene un relojero con experiencia, por la reparación de un número x de relojes, está dado por la función ingreso:

$$I(x) = 20.000x - 50x^2$$

Como la ecuación de la función cuadrática que modela la situación está planteada, se establece cuáles son los elementos principales de la parábola que sirven para dar respuesta a lo que se está preguntando:

- a) Determine cuántos relojes se deben reparar para obtener el ingreso máximo mensual

El gráfico de la función $I(x) = 20.000x - 50x^2$ es una parábola, por lo que calcula el vértice:

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{-20.000}{-100} = 200$$

Esto nos indica que el relojero debe reparar 200 relojes para obtener el máximo ingreso mensual.

- b) ¿Cuál será el ingreso máximo mensual? Este se determina calculando la coordenada y del vértice de la función I(x):

$$I(x) = 20.000 \cdot 200 - 50 \cdot 200^2 = 2.000.000$$

El ingreso máximo mensual es 2.000.000 de pesos.

En los siguientes links encontraras unos videos sobre problemas de funciones cuadráticas:

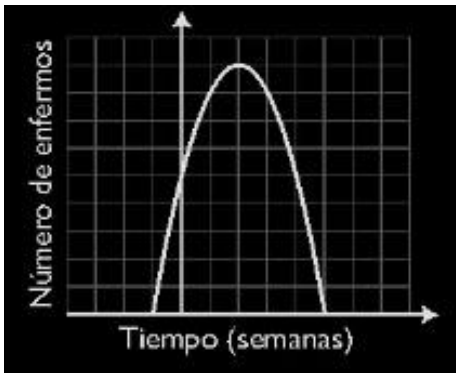
https://www.youtube.com/watch?v=Wd5TQTuOG2U&ab_channel=GuilleQuezada

https://www.youtube.com/watch?v=ZpNFeVcjVpQ&ab_channel=F%C3%ADsicaVirtualAcademia



ACTIVIDAD DOS

1. La siguiente gráfica representa el número de enfermos de gripa en un hospital:



Con base a la gráfica responda:

- ¿Durante cuántas semanas aumentó la enfermedad?
 - ¿Durante cuántas semanas disminuyó la enfermedad?
 - ¿Qué día hubo más enfermos en el hospital? ¿Cuántos fueron?
 - ¿Cuántos días duró la enfermedad?
2. Una bola de golf es golpeada desde el piso. La distancia, en pies, desde el nivel del suelo está dada por la función cuadrática $h(t) = -2t^2 + 9t$, donde t es el tiempo de vuelo en segundos.
- ¿Cuál es la altura que alcanza a los dos segundos de vuelo?
 - ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola de golf?
 - ¿Cuánto tiempo transcurre desde que sale disparada la bola hasta que toca de nuevo el suelo?, para resolver esta pregunta debes tener en cuenta cuando la bola toca el suelo la altura es igual a cero, por lo tanto, se deben hallar las raíces de la función es decir aplicar la fórmula cuadrática.
3. El precio unitario de cierto artículo viene dado por la ecuación de demanda $p = 0.5x + 1500$, donde x es el número de artículos que se ponen en el mercado en una semana. Si se sabe que el ingreso es el precio unitario por el número de unidades producidas y vendidas. Hallar:
- La función de ingreso, para ello tenga en cuenta que el ingreso es el producto del precio unitario por el número de artículos producidos y vendidos.
 - El ingreso máximo y su correspondiente nivel de producción.
4. El rendimiento de combustible de un automóvil se obtiene de acuerdo a la velocidad con la que se desplaza, si x es la velocidad medida en kilómetros por hora (km/h), el rendimiento está dado por la función:



$$R(x) = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{7}{2}x, \text{ para } 0 < x < 120$$

a) Completar la siguiente tabla de rendimiento:

Velocidad en km/h	20	40	60	70	80	100
Rendimiento $R(x)$						

b) ¿A qué velocidad se obtiene el máximo rendimiento?

La respuesta esta dada por la coordenada x del vértice de la función $R(x)$

Determinela:

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

Por lo tanto, la velocidad que permite un mayor rendimiento de combustible es: km/h

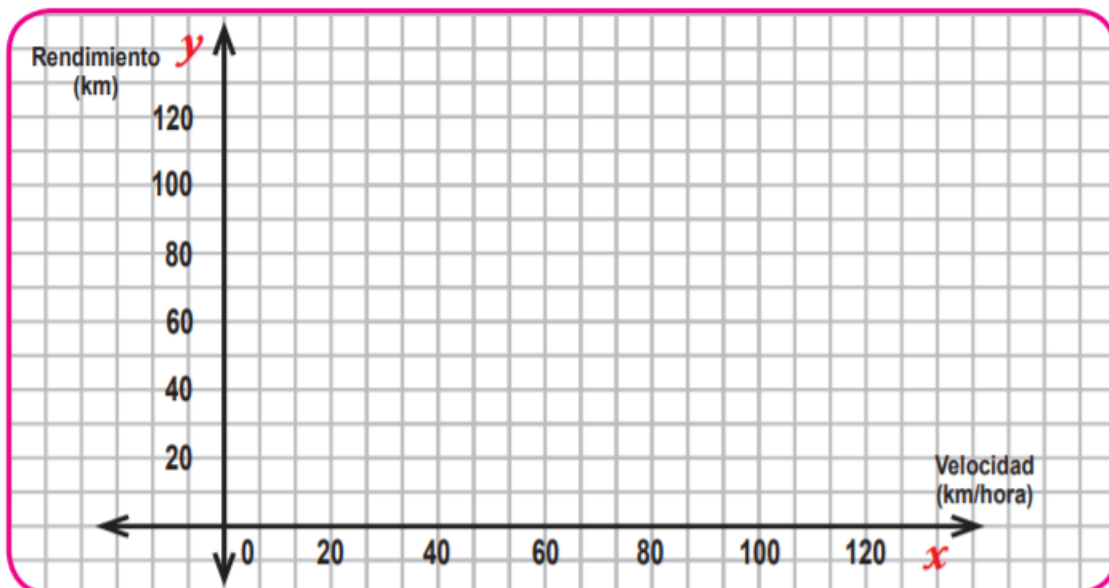
c) ¿Cuál es el máximo rendimiento?

El máximo rendimiento de combustible está dado por la coordenada y del vértice de la función $R(x)$.

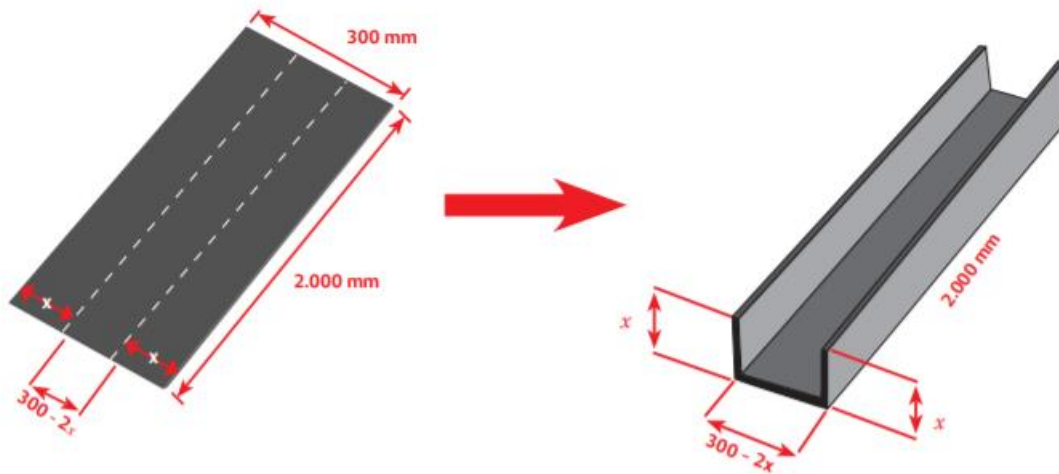
Determinela:

$$R\left(\frac{-b}{2a}\right) \rightarrow R(\boxed{}) = -\frac{1}{40} \cdot \boxed{}^2 + \frac{7}{2} \cdot \boxed{} \rightarrow R(\boxed{}) = \boxed{}$$

d) Graficar la parábola que modela la situación.



5. Para hacer una canaleta con un pedazo de plancha de zincalum liso de 2000 mm de largo y 300 mm de ancho, se dobla hacia arriba algunos milímetros a cada lado, como muestra la figura:



(x: cantidad de milímetros a doblar para hacer la canaleta.)

- a) ¿Cuántos milímetros deben doblarse para que la canaleta de 300 mm de ancho tenga una capacidad máxima? (x : cantidad de milímetros a doblar para hacer la canaleta.)

Se plantea la función que modela la capacidad volumétrica que tendrá la canaleta, la que calcularemos multiplicando el largo. alto. Ancho

$$V(x) = 2.000 \cdot x \cdot (300 - 2x) \rightarrow V(x) = 600.000x - 4.000x^2$$

Gráficamente es una parábola convexa, lo que implica que su vértice es el punto máximo.

Determine la coordenada x del vértice

Determine la coordenada x del vértice

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

Esto nos indica que debemos doblar milímetros de plancha a cada lado, para hacer la canaleta con máxima capacidad volumétrica.

b) ¿Cuál es la máxima capacidad volumétrica?

La máxima capacidad volumétrica está dada por la coordenada y del vértice de la función $V(x)$

$$V\left(\frac{-b}{2a}\right) \rightarrow V(\boxed{}) = 600.000 \cdot \boxed{} - 4.000 \cdot \boxed{}^2 = \boxed{}$$



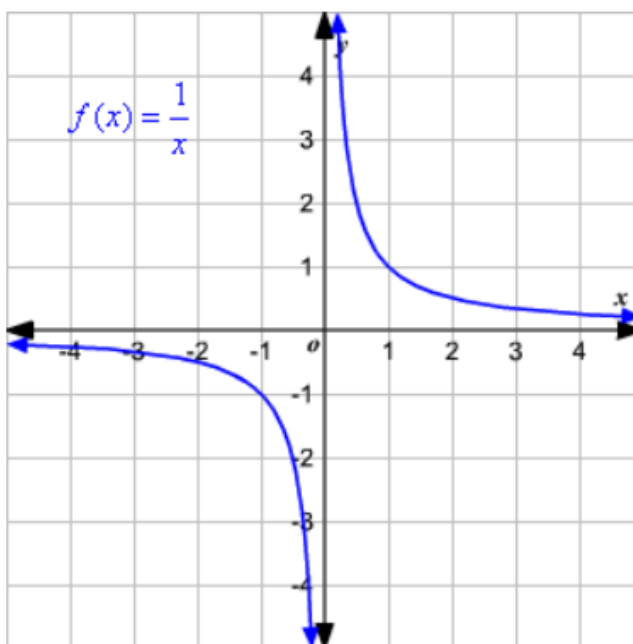
FUNCIONES RACIONALES

Es una función de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x)$ es $\neq$ a cero. Además, debe cumplir con la condición que en el denominador por los menos debe tener un grado uno, esto quiere decir una x elevada a la uno.

Ejemplos: $y = \frac{3}{x}$, $y = \frac{2x+1}{x+5}$, $y = \frac{1}{x^2}$

La función principal de las funciones racionales es:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ y la gráfica es una hipérbola.}$$



El dominio y rango es el conjunto de todos los números reales excepto 0.

$$\text{Dominio : } \{x | x \neq 0\}$$

$$\text{Rango : } \{y | y \neq 0\}$$

https://www.youtube.com/watch?v=7cUJKHfcXaU&t=216s&ab_channel=Pi-ensaMatematik

Valor excluido

En una función racional, un valor excluido es cualquier valor de x que hace al valor de la función y no definido. Así, estos valores deben ser excluidos del dominio de la función.

Por ejemplo, el valor excluido de la función $y = \frac{2}{x+3}$ es -3 . Esto es, cuando $x = -3$, el valor de y no está definido.

Así, el dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales excepto -3 .

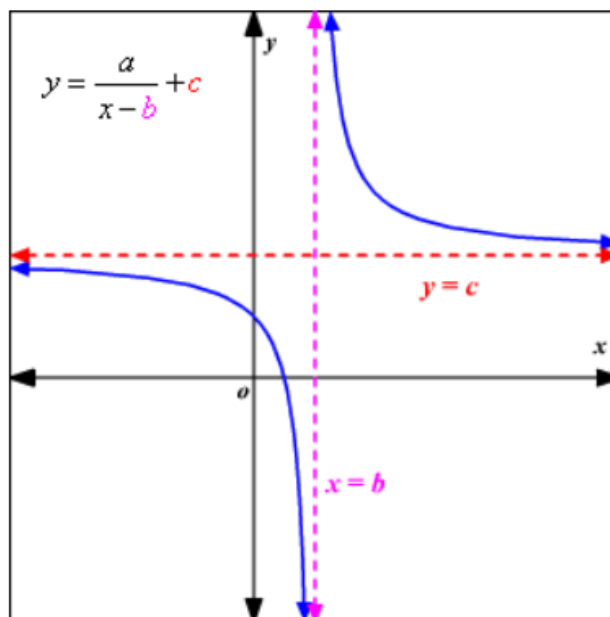


Asíntotas

Una asíntota es una recta que se acerca a la gráfica de la función, pero nunca la toca. En la función

padre $f(x) = \frac{1}{x}$, tanto los ejes x y y son asíntotas. La gráfica de la función principal se acercará más y más pero nunca tocará las asíntotas.

Una función racional de la forma $y = \frac{a}{x-b} + c$ tiene una asíntota vertical en el valor excluido, o $x = b$, y una asíntota horizontal en $y = c$.



Características de las funciones racionales de la forma $f(x) = \frac{1}{x^n}$

- El dominio son los reales excepto el cero
- Si n es un número par, el recorrido o rango es $(0, +\infty)$
- Si n es un número impar, el rango son los números reales excepto el cero
- Las funciones $f(x) = \frac{1}{x^n}$ con n siendo un número par, son simétricas con respecto al eje Y
- Las funciones $f(x) = \frac{1}{x^n}$ con n siendo un número impar, son simétricas con respecto al origen de coordenadas
- Las rectas $X=0$ y $Y=0$ son asíntotas, vertical y horizontal respectivamente.



Ejemplo 1

Las funciones $f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x - 5}$ y $g(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4}$ son funciones racionales. El dominio de cada una se halla determinando los valores de la variable independiente (en este caso x), que anulan el denominador:

- Para f se resuelve la ecuación $x - 5 = 0$, de donde se obtiene que $x = 5$. Luego, $D(f) = \mathbb{R} - \{5\}$.

- Para g se resuelve la ecuación cuadrática $x^2 - 4 = 0$.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ o } x = 2$$

De lo cual, $D(g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Ejemplo 2

En la función $f(x) = \frac{1}{x^8}$ el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$ y el recorrido es $(0, +\infty)$.

Las rectas $x = 0$ y $y = 0$ son asíntotas, vertical y horizontal, respectivamente, para $f(x)$.

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^8} = \frac{1}{x^8} = f(x)$; luego, $f(x)$ es una función par y simétrica respecto al eje Y .

La Figura 2.28 muestra la gráfica de $f(x)$.

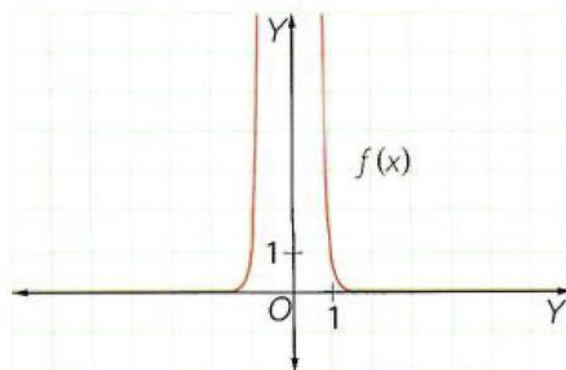


Figura 2.28

Ejemplo 3 Hallar las asíntotas horizontales y verticales de la función: $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$



Para hallar las asíntotas horizontales se comparan los grados de los polinomios (numerador y denominador) de la función racional n y m , respectivamente, veamos...

- i) Si $n < m$ entonces $y=0$, el eje de x , es la asíntota horizontal
- ii) Si $n = m$ entonces $y=a_n/b_m$, es la asíntota horizontal
- iii) Si $n > m$ entonces **no hay** asíntota horizontal.

El grado del denominador de la función es 1 y el del denominador es 2, por lo tanto, $n < m$, por lo que $Y=0$ en el eje x y es la asíntota horizontal.

Para hallar la asíntota vertical se debe hallar el valor en que el denominador al operarlo es cero. En algunos casos se debe factorizar para otros no, en este caso se factoriza así:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$$
$$f(x) = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$$
$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$

https://www.youtube.com/watch?v=umWSSxZNJaQ&ab_channel=Matem%C3%A1ticasprofeAlex

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Ejemplo 1

Una empresa de bebidas desea diseñar una lata cilíndrica que contenga 330 cm^3 de refresco. Expresa la cantidad de material que se va a necesitar para cada envase, en función del radio de la base.

Respuesta

Para determinar la cantidad de material que se necesita para cada envase, se debe hallar el área total de la lata cilíndrica, la cual está en función del radio y la altura del envase, que son cantidades variables en la situación y debe expresarse de modo que permita calcular el área.

Si r es el radio de la base y h es la altura de la lata cilíndrica en cm entonces:

$$V = \pi r^2 h = 330$$

$$\text{Área Tota } (A_t) = 2\pi r(h+r)$$

Al despejar h en la expresión del volumen y sustituirla en el área total se obtiene:

$$h = \frac{330}{\pi r^2} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2\pi r \left(\frac{330}{\pi r^2} + r \right) = 2\pi r \left(\frac{330 + \pi r^3}{\pi r^2} \right) = \frac{660 + 2\pi r^3}{r}$$



La expresión que corresponde al área total es una función en la variable r que recibe el nombre de la función racional y tiene como dominio a los números reales diferentes de 0

Ejemplo 2

En un recipiente tenemos 20 litros de agua y mezclamos 1 libra de sal. Añadimos agua a un ritmo de 2 litros por minuto y al mismo tiempo añadimos sal a un ritmo de 0.2 libras por minuto. Encuentra la concentración en el recipiente después de 10 minutos.

Solución: Podemos usar t para representar al número de minutos desde que empezamos a añadir agua y sal. Dado que el agua incrementa a 2 litros por minuto y la sal a 0.2 libras por minuto, estos son ritmos constantes. Esto nos dice que la cantidad de agua y la cantidad de sal son lineales. Podemos escribir una ecuación para cada uno:

Agua: $A(t) = 20 + 2t$ en litros

Sal: $S(t) = 1 + 0.2t$ en libras

La concentración, C , será la proporción de libras de sal a litros de agua:

$$C(t) = \frac{1+0.2t}{20+2t}$$

La concentración después de 10 minutos está dada al evaluar a $C(t)$ en $t = 10$:

$$\begin{aligned} C(10) &= \frac{1+2}{20+20} \\ &= \frac{3}{40} \end{aligned}$$

Esto significa que la concentración es 3 libras de sal a 40 litros de agua.

ACTIVIDAD TRES

- Determina cuáles de las siguientes funciones son racionales. Justifica tu respuesta
 - $f(x) = \frac{x^2-3}{2}$
 - $g(x) = \frac{2x}{x^2-5}$
 - $j(x) = \frac{x^2+2x^3}{x^2+7}$
 - $k(x) = \frac{5x+3}{4}$
- Determina el dominio, el rango y las asíntotas horizontales y verticales de cada una de las siguientes



funciones racionales:

a. $h(x) = \frac{2}{x-2}$

b. $f(x) = \frac{1}{x^3+8}$

c. $p(x) = \frac{5x^2-1}{3x^2+9}$

d. $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

3. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

- a. Toda función polinómica es racional
- b. Toda función racional tiene al menos una asíntota horizontal
- c. Toda función racional tiene mínimo una asíntota vertical

4. Una función racional tiene una o más asíntotas oblicuas solo cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador: De acuerdo con esta información, determina si las siguientes funciones tienen o no asíntotas oblicuas

a. $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-x-6}$

b. $f(x) = \frac{2x^3+5x+3}{x^2-4}$

c. $f(x) = \frac{-3x+2}{x^2}$

d. $f(x) = \frac{-3x^7+2}{x^3-23}$

5. Realizar el análisis completo de la función racional: $f(x) = \frac{x-4}{x-3}$

6. Se ha comprado empíricamente que las ganancias que obtiene un casino en la ruleta depende del tiempo que se permanezca jugando. Esta relación entre el tiempo y las ganancias se modela con la función:

$G(t) = \frac{10000t}{t^2+40000}$ donde t representa el tiempo de juego en minutos y $G(t)$, las ganancias en miles de peso.

- a. ¿Por qué se puede afirmar que en este casino siempre se obtienen ganancias?
- b. ¿Qué ganancias obtiene el casino si la ruleta está ocupada durante media hora?
- c. ¿La función $G(t)$ tiene alguna asíntota?

7. Se administra una droga a un paciente, y se vigila la concentración de la droga en su torrente sanguíneo. En el tiempo $t \geq 0$ (en horas desde que se aplicó la droga), la concentración (en mg/L) está dada por la función: $c(t) = \frac{8t}{t^2+1}$ donde c es la concentración y t el tiempo en horas.

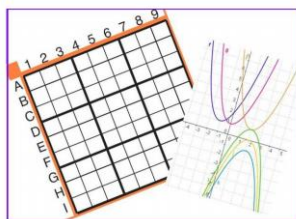
Responda:

- a) ¿Qué ocurre a la concentración de medicamento después de un tiempo prolongado?
- b) ¿Cuánto tarda la concentración en llegar a 4mg/L? Nota: utilizar la formula cuadrática para resolver.



ACTIVIDAD 4

SUDOMATES DE LAS PARÁBOLAS



OBJETIVO: Con este pasatiempo se quiere reforzar el trabajo con las funciones parabólicas haciendo usos de los recursos tecnológicos.

RECURSO TECNOLÓGICO: <https://www.mathway.com/es/Algebra>

PRIMERA FASE: Aquí tienes 6 funciones de segundo grado que deberás estudiar para poder resolver este sudoku:

$$f1(x) = -(x^2 - 2x - 8)$$

$$f2(x) = -(x - 5)^2 + 4$$

$$f3(x) = \frac{-2x^2 - 8x + 10}{3}$$

$$f4(x) = \frac{-(x + 2)(x - 6)}{4}$$

$$f5(x) = 9 - x^2$$

$$f6(x) = -\frac{4}{7}(x - 1)(x - 8)$$

Para poder contestar a las preguntas es conveniente que complete la siguiente tabla:

FUNCIONES	CEROS DE LA FUNCIÓN	ABSCISA VÉRTICE	ORDENADA VÉRTICE
$f1(x) = -(x^2 - 2x - 8)$			
$f2(x) = -(x - 5)^2 + 4$			
$f3(x) = \frac{-2x^2 - 8x + 10}{3}$			
$f4(x) = \frac{-(x + 2)(x - 6)}{4}$			
$f5(x) = 9 - x^2$			
$f6(x) = -\frac{4}{7}(x - 1)(x - 8)$			

Contesta a las siguientes preguntas para rellenar algunas casillas de este sudoku:

	PREGUNTA		PREGUNTA
A1	Valor máximo de f1	A5	Mayor raíz de f4



A7	Abscisa del vértice de f_2	B2	Distancias entre las dos raíces de f_5
B3	El opuesto al cero negativo de f_1	C2	Cero positivo de f_3
C5	La mitad del valor máximo de f_3	C8	Número de cortes con OX de f_2
C9	El cero mayor de f_6	D9	La menor raíz de f_2
E1	Punto de corte con OX, positivo, de f_5	E4	Valor máximo de f_5
E9	Valor máximo de f_2	F1	El cero positivo de f_1
F2	El cero mayor de f_2	F6	El valor absoluto de la raíz negativa de f_3
F8	Punto de corte con OX, positivo, de f_4	G2	El opuesto de la menor raíz de f_4
G3	Máximo de f_6	H5	Abscisa del vértice de la parábola f_4
H7	Cuadrado de los ceros de f_5	H9	Distancia entre los dos ceros de f_6
I3	La mitad de la mayor raíz de f_6	I6	Ordenada del vértice de la parábola f_3
I7	La cuarta parte de la mayor raíz de f_6		

Cuando ya tengas las preguntas resueltas ubica los números en el sudoku y luego completa el sudoku, recuerde que en cada cuadrado de 3 x3 deben ir números del 1 al 9 sin que se repitan, igual en las filas y columnas.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A									
B									
C									
D									
E									
F									
G									
H									
I									

Por último:

1. ¿Qué aprendió de esta guía?
2. ¿Qué le cambiarías?

Recuerda:

"El precio de la grandeza es la responsabilidad."

Winston Churchill