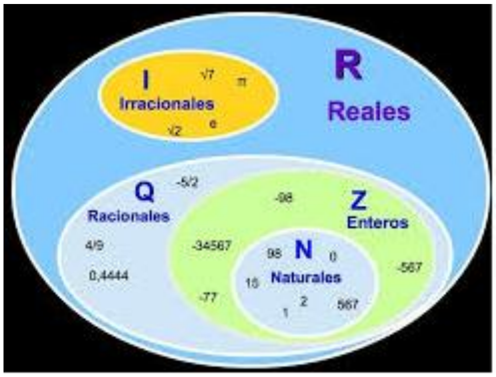
EXPLICACIÓN

Recordemos que el gran conjunto de los números reales R está formado por la unión del conjunto de los números racionales Q y el conjunto de los números irracionales I.

En símbolos R = Q U I



ACTIVIDAD: Clasifique cada uno de los siguientes números según el conjunto o conjuntos de números a los que pertenezca:

Ejemplo: -3,4 no es Natural, no es Entero, es Racional y Real.

No es un número natural, porque los naturales son positivos.

No es un entero, porque los enteros no tienen parte decimal, o mejor dicho, es cero.

Es un número racional, porque todo decimal se puede expresar como una fracción.

Ejemplo: 281 Es Natural, Es Entero, Es Racional y Real.

Es entero porque todo natural es un entero. Los enteros contienen a los naturales.

Es racional porque todo número entero se puede expresar como un racional, colocándole 1 como denominador.

Ejemplo: $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 2} = \sqrt{2^2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

No es un número natural porque contiene un radical

No es un entero porque contiene parte radical

No es un racional porque $\sqrt{2}$ equivale un decimal infinito no periódico y esta clase de decimal no se puede expresar como un racional.

Es un irracional porque no se puede expresar como un racional.

Es un real, porque todo irracional es subconjunto de los reales.

ACTIVIDAD: Determine el valor de verdad de cada una de las expresiones dadas y justifique su respuesta:

a. El producto de tres números enteros negativos es positivo.

Rta: La afirmación o proposición es falsa porque (-)(-)(-) = (+)(-) = -

Por ley de los signos, menos por menos es más y más por menos es menos.

b. 5/3 equivale a un decimal infinito periódico.

Rta: La afirmación es verdadera porque al realizar la división el cociente es el decimal infinito periódico $1,\overline{6}$

ACTIVIDAD: Encuentre el número real que cumpla con todas las condiciones exigidas:

a. Es un número natural mayor que 5 y menor que 8. Cuántas soluciones hay?

Rta: Iniciamos en 6 porque el número debe ser mayor que 5 y terminamos en 7 porque debe ser menor que 8. Por lo tanto los números son 6 y 7.

b. No es natural, pero es entero y es mayor que -2 y menor que 2. Cuántas soluciones tiene el ejercicio?

Rta: Si el número no es natural, puede ser entero negativo o fracción tanto positiva como negativa. Pero luego dice que es entero, por lo tanto la opción de ser fracción queda descartada. Ahora bien, los enteros mayores que -2 son -1,0,1,2,3,4 etc,; y los enteros menores que 2 son 1,0,-1,-2,-3,-4 etc. Al final intersectamos los dos conjuntos anteriores y obtenemos como respuesta los números -1,0,1

Vamos a analizar si la opción *a* es o no la correcta:

Para saber si las dos longitudes son iguales, tendremos que averiguar si los dos números representan o no la misma cantidad, es decir:

$$3,5 = 3\tfrac{1}{5} \text{ cm } ?$$

Podemos aplicar varias estrategias, entre ellas:

- Analizar lo que cada número representa y comparar si son equivalentes.
- Expresar las dos cantidades (el decimal y el mixto) como números fraccionarios.
- Expresar las dos cantidades como decimales
- Expresar las dos cantidades como fraccionarios mixtos.

Vamos a elegir la primera estrategia:

- Analizar lo que cada número representa y comparar si son equivalentes.

Nos preguntamos entonces, qué representa el decimal 3,5 :

El decimal es 3 unidades enteras y 5 décimas.

Cinco décimas, significa 5 de 10, ósea la mitad.

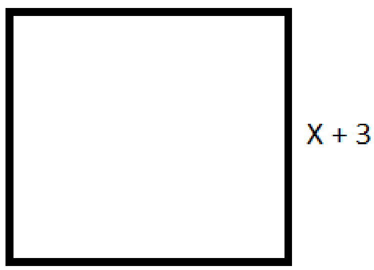
Así 3,5 representa 3 unidades enteras más la mitad de otra unidad.

Nos preguntamos entonces, qué representa el fraccionario mixto $3\frac{1}{5}$

El mixto es 3 unidades enteras para la quinta parte de otra unidad.

Si comparamos finalmente el decimal y el mixto, vemos que ambos contienen 3 unidades, pero en el decimal se toma la mitad de la cuarta unidad, en cambio en el mixto, se toma solo la quinta parte de la cuarta unidad, por lo tanto, como ser la mitad es mayor a la quinta parte, concluimos que 3,5 es mayor que $3\frac{1}{5}$. Y obviamente al no ser iguales, no representan lo mismo.

ACTIVIDAD: Si se quiere cercar un terreno de forma cuadrada como el que se muestra en la figura



Y se sabe que el costo de la cerca por cada kilómetro es de $950.000; la expresión que representa el costo del cercado del terreno en miles de pesos puede ser:

C = 950(X + 3) ? Analiza y responde.

Primero analicemos el enunciado y la gráfica:

- Cercar un terrero significa calcular el perímetro, es decir tomar en cuenta todos los 4 lados.
- Si un lado mide x+3 todos los demás también, por ser un cuadrado.
- Si tengo el valor de una unidad, puedo multiplicar por la cantidad de unidades, para encontrar el total. (Imagine que conoce el precio de un dulce y quiere comprar varios. Para averiguar el valor a pagar, simplemente multiplico el costo de un dulce por la cantidad de dulces)

Ahora sí preguntémonos qué representa C = 950(X + 3)

- X+3 es la medida de un solo lado del cuadrado, y necesitamos tomar los cuatro lados.
- Indica que con esta expresión calculo el costo de un solo lado del cuadrado.

Conclusión: La expresión C = 950(X + 3) no sirve para calcular el costo total.

Racionalización de los denominadores

Consiste en quitar todos los radicales del denominador

https://www.youtube.com/watch?v=eq3qfOPttYM

1. Una vez vista la primera parte del video, observe el análisis de este otro ejemplo:

   Racionalizar: $\dfrac{3}{\sqrt{5}} =$

- Qué operación tengo planteada?
  Rta: Una división

- Necesito racionalizar?
  Rta: Sí porque en el denominador hay un radical.

- Cómo deben ser la fracción inicial y la fracción final después de la racionalización?
  Rta: Las fracciones deben ser equivalentes, es decir, deben representar lo mismo.

- Cómo obtener fracciones equivalentes.
  Rta: Puedo obtener fracciones equivalentes por medio de la amplificación o de la simplificación.
  Usaremos la amplificación, multiplicando numerador y denominador por el mismo número.

- Cuál es el índice y cuál el radicando o cantidad sub-radical?
  Rta: En $\sqrt[2]{5}$ el índice es 2 y la cantidad sub-radical es 5.

- Puedo expresar el radicando como una potencia? Si sí, hágalo.
  Rta: Solamente que $5 = 5^1$

- Compare el índice con el exponente de la cantidad sub-radical.
  Rta: Son diferentes, porque 2≠1

- Cuál es la estrategia general para eliminar el radical del denominador? Recuerde la propiedad $\sqrt[n]{a^n} = a$
  Rta: Como el índice es 2, necesito que el exponente de la cantidad subradical también sea 2 para eliminar el radical.
- Qué radical le haría falta para aplicar la estrategia?
  Rta: Haría falta otro $\sqrt{5}$ para que quedara:
  $\sqrt{5}.\sqrt{5} = \sqrt{5^2} = \sqrt[2]{5^2} = 5$

- Entonces, por cuál radical debo multiplicar el denominador de la fracción para poder afirmar que he eliminado el radical del denominador?

  Rta: Por $\sqrt{5}$ Veamos:

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\quad}{\sqrt{5}}$$

- Ahora, qué debo escribir en el numerador faltante?

  Rta: Como la fracción resultante debe ser equivalente a la fracción inicial, debo recordar que puedo lograrlo por la amplificación, es decir, multiplico al numerador y al denominador por el mismo número. En ese orden de ideas, como al denominador se multiplicó por $\sqrt{5}$ también al numerador que es 3 debe multiplicarse por $\sqrt{5}$. Veamos:

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

- Cómo se multiplican dos o más fracciones. Hágalo.

  Rta: Se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí.

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}$$

- Puede eliminar radicales? Hágalo

  Rta: Sí, puedo eliminar el radical del denominador:

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

  Y listo, hemos terminado la racionalización del denominador, porque ya no vemos radicales allí.

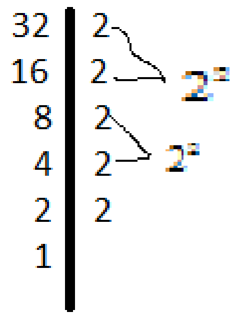
2. Otro ejemplo:

   Racionalizar: $\frac{4}{\sqrt{32}}$

- Qué operación tengo planteada?

  Rta: Una división
- Necesito racionalizar?

  Rta: Parece que sí, sin embargo veamos a qué corresponde $\sqrt[2]{32}$



O también puedo afirmar que: $\sqrt[2]{32}=\sqrt[2]{2^5}$

- Si el exponente de la cantidad subradical es mayor que el índice, descompóngalo aplicando la propiedad $a^{n+m}=a^n.a^m$ y simplifique el radical hasta obtener que el exponente del radicando sea menor que el índice. Ejm:

$$\sqrt{32}=\sqrt{2^2.2^2.2}=\sqrt{2^2}.\sqrt{2^2}.\sqrt{2}=2(2)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

Es decir que el ejercicio que tengo es:

$$\frac{4}{\sqrt{32}}=\frac{4}{4\sqrt{2}}$$

Al simplificar, es decir, al dividir numerador y denominador entre 4, obtengo:

$$\frac{4}{\sqrt{32}}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto, me preguntan que si debo racionalizar a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y la respuesta es SÍ, porque hay un radical en el denominador.

- Cómo deben ser la fracción inicial y la fracción final después de la racionalización?
  Rta: Las fracciones deben ser equivalentes, es decir, deben representar lo mismo.

- Cómo obtener fracciones equivalentes.
  Rta: Puedo obtener fracciones equivalentes por medio de la amplificación o de la simplificación.
  Usaremos la amplificación, multiplicando numerador y denominador por el mismo número.

- Cuál es el índice y cuál el radicando o cantidad sub-radical?
  Rta: En $\sqrt[2]{2}$ el índice es 2 y la cantidad sub-radical es 2^1

- Puedo expresar el radicando como una potencia? Si sí, hágalo.
  Rta: Solamente que $2=2^1$

- Compare el índice con el exponente de la cantidad subradical.
  Rta: Son diferentes porque 2≠1

- Cuál es la estrategia general para eliminar el radical del denominador? Recuerde la propiedad $\sqrt[n]{a^n} = a$

  Rta: Necesito tener $\sqrt{2}.\sqrt{2}$ para poder cancelar el radical: $\sqrt{2}.\sqrt{2} = \sqrt[2]{2^2} = 2$

- Por lo anterior, qué radical le haría falta para aplicar la estrategia?

  Rta: Necesito otro $\sqrt{2}$ en el denominador.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{}{\sqrt{2}}$$

- Ahora, qué debo escribir en el numerador faltante?

  Rta: Como la fracción resultante debe ser equivalente a la fracción inicial, debo recordar que puedo lograrlo por la amplificación, es decir, multiplico al numerador y al denominador por el mismo número. En ese orden de ideas, como al denominador se multiplicó por $\sqrt{2}$ también al numerador que es 1 debe multiplicarse por $\sqrt{2}$. Veamos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

- Cómo se multiplican dos o más fracciones. Hágalo.

  Rta: Se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}$$

- Puede eliminar radicales? Hágalo

  Rta: Sí, puedo eliminar el radical del denominador:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

  Y listo, hemos terminado la racionalización del denominador, porque ya no vemos radicales allí.

Racionalizar:

$$\frac{3}{\sqrt{X}+4} = \frac{3}{\sqrt{X}+4}.\left(\frac{\sqrt{X}-4}{\sqrt{X}-4}\right) = \frac{3(\sqrt{X}-4)}{\left(\sqrt{X}+4\right)\left(\sqrt{X}-4\right)} = \frac{3\sqrt{X}-12}{\left(\sqrt{X^2}-4^2\right)} =$$

$$= \frac{3\sqrt{X}-12}{\left(X-16\right)}$$

Racionalizar:

PROPIEDADES:

$$\sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b} \qquad \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$$

Dada la fracción $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)$ *ahora multiplico numeradores entre si y denominadores entre si.*

$$\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{3}-\sqrt{5}\sqrt{2}+\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{2^2}-\sqrt{3^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{6}-3-\sqrt{10}+\sqrt{15}}{2-3} = \frac{\sqrt{6}-3-\sqrt{10}+\sqrt{15}}{-1}$$

ACTIVIDAD:

Usando la calculadora, calcule: $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-36}$, $\sqrt[4]{-16}$

Analice todos los resultados obtenidos y redacte una proposición. Argumente.

HA NACIDO UN NUEVO CONJUNTO NUMÉRICO:

Números Imaginarios

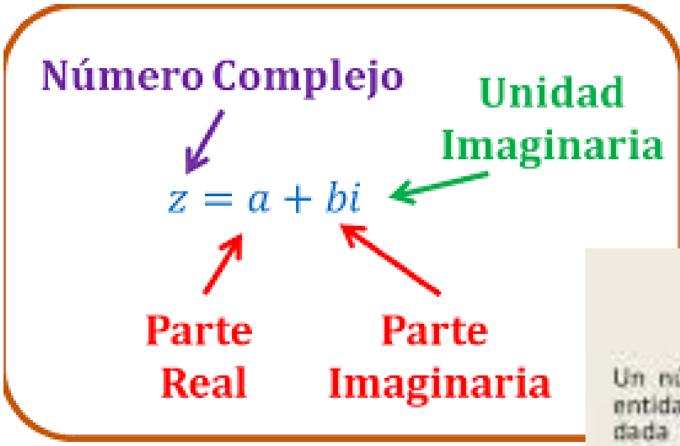
Se define como la raiz cuadrada de –1.

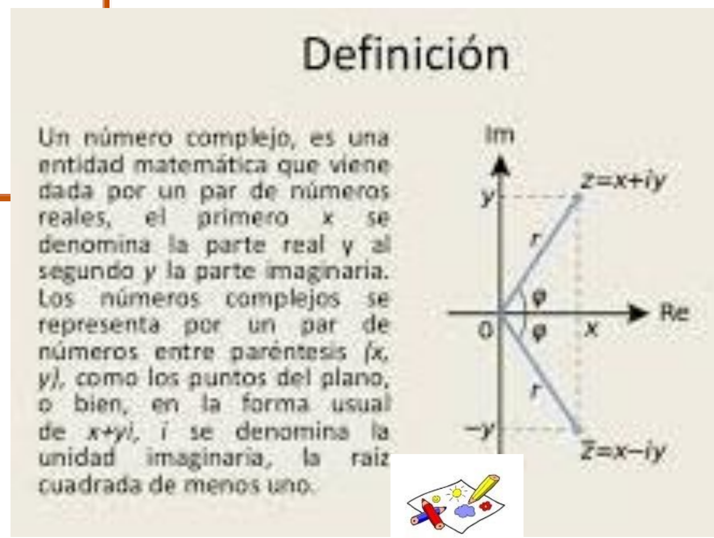
$$\sqrt{-1} = i$$

y es por eso que

$$i^2 = -1$$

$i^0 = 1$	**Potencias de la unidad imaginaria**
$i^1 = i$	
$i^2 = -1$	$i^{38} = -1$
$i^3 = -i$	
$i^4 = 1$	$38 \,\lfloor 4$
$i^5 = i$	$2 \quad 9$
$i^6 = -1$	
$i^7 = -i$	$i^{38} = (i^4)^9 \cdot i^2 = 1^9(-1) = 1(-1) = -1$





Ejemplo:

Número complejo	Forma estándar $a + bi$	Descripción de las partes
$7i - 2$	$-2 + 7i$	La parte real es -2 y la imaginaria es 7.
$4 - 3i$	$4 + (-3)i$	La parte real es 4 y la imaginaria es -3
$9i$	$0 + 9i$	La parte real es 0 y la imaginaria es 9
-2	$-2 + 0i$	La parte real es -2 y la imaginaria es 0

OPERACIONES

Observe mi video:

https://www.youtube.com/watch?v=WVygxO5PTTw

Conclusión:

Para sumar y restar números complejos, se suman o restan las partes reales entre sí y las partes imaginarias entre sí.

En la resta tenga presente que al destruirse un paréntesis, las cantidades salen con signo contrario.

Para multiplicar números complejos entre sí, se multiplican todos con todos.

Ejemplos:

Ejemplo 1: suma de números complejos

Al sumar números complejos, simplemente sumamos las partes reales y sumamos las partes imaginarias. Por ejemplo:

$$(3 + 4i) + (6 - 10i)$$

$$= (3 + 6) + (4 - 10)i$$

$$= 9 - 6i$$

Ejemplo 2: resta de números complejos

Al restar números complejos, simplemente restamos las partes reales y restamos las partes imaginarias. Por ejemplo:

$$(3 + 4i) - (6 - 10i)$$

$$= (3 - 6) + (4 - (-10))i$$

$$= -3 + 14i$$

Conjunto de práctica 2: multiplicar números complejos

La multiplicar números complejos, realizamos una multiplicación similar al desarrollo de paréntesis en productos binomiales:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

A diferencia de la multiplicación binomial usual, con números complejos también tomamos en cuenta el hecho que $i^2 = -1$.

Ejemplo 1

$$2 \cdot (-3 + 4i)$$

$$= 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 4i$$

$$= -6 + 8i$$

Ejemplo 2

$$3i \cdot (1 - 5i)$$

$$= 3i \cdot 1 + 3i \cdot (-5)i$$

$$= 3i - 15i^2$$

$$= 3i - 15(-1)$$

$$= 15 + 3i$$

Ejemplo 3

$$(2 - 3i)(-4 + 8i)$$

$2(-4) = -8$
$2(8i) = 16i$
$(-3i)(-4) = 12i$
$(-3i)(8i) = -24i^2 = -24(-1) = 24$

Queda planteado: $-8 + 16i + 12i + 24 =$

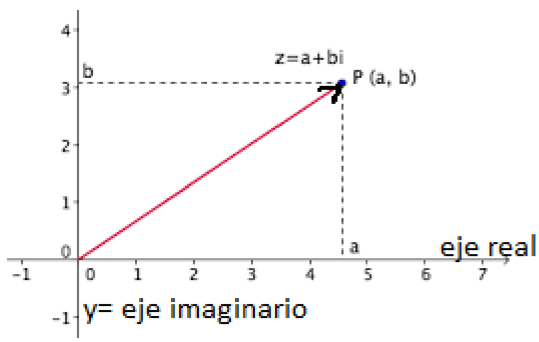
Ahora se suman las partes reales entre sí y las imaginarias entre sí:

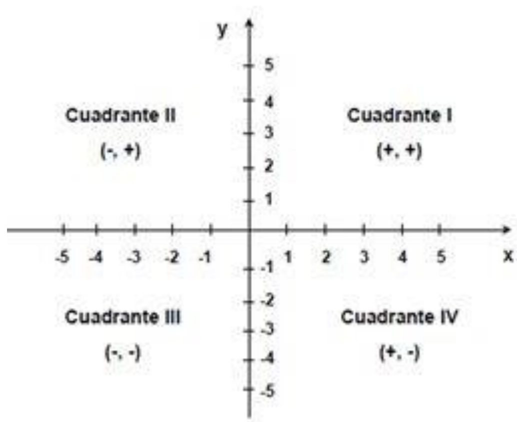
$-8 + 24 = 18$
$16i + 12i = 28i$

El producto o resultado de la multiplicación es: 18+28i

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE NÚMEROS COMPLEJOS

El número complejo se ubica en un plano complejo, conformado por dos ejes perpendiculares entre sí. En el eje o recta horizontal se ubica la parte real del complejo, y en el eje o recta vertical se ubica la parte imaginaria del complejo. Una vez determinado el punto o pareja ordenada, se traza un vector desde el origen de coordenadas hasta el punto ubicado.

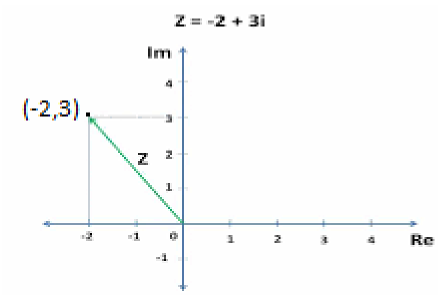




Ejm: Ubicar z = -2+3i

Para ubicarlo, se expresa primero como pareja ordenada :

(parte real , parte imaginaria) = (-2,3) Esta pareja se ubica en el segundo cuadrante. Luego se traza el vector desde el origen de coordenadas (0,0) hasta el punto (-2,3)



Analice los siguientes videos sobre la representación gráfica de los Complejos:

https://es.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:complex/x2ec2f6f830c9fb89:complex-plane/v/plotting-complex-numbers-on-the-complex-plane