PROBLEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

EXPLICACIÓN

Qué son las ecuaciones lineales?

Las **ecuaciones lineales o de primer grado** son del tipo $ax + b = 0$, con $a \neq 0$, ó cualquier otra ecuación en la que al operar, trasponer términos y simplificar adopten esa expresión.

PROBLEMA

Escriba la función que se representa el enunciado, identificando la variable independiente y la dependiente:

El salario neto (g) de una persona que gana $20.000 por hora

Variable dependiente: g = El salario neto

Variable independiente: h = Número de horas de trabajo

Por tanto la función la expreso: $g = 20.000(h)$

Conjunto Dominio son todos los reales positivos: $D(f) = \mathbb{R}^{+}$ porque h no puede ser un número real negativo, ya que representa el número de horas. El mínimo valor será cero, para lo cual, el trabajador por no trabajar ni un minuto, pues no ganará ni un peso.

El conjunto Rango son también todos los Reales positivos, ya que al despejar la variable independiente h:

$$g = 20.000(h)$$
$$\frac{g}{20.000} = h$$

Verificamos que el cociente puede darnos cualquier real, pero positivo.

PROBLEMA

[https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:linear-equations- graphs/x2f8bb11595b61c86:applying-intercepts-and-slope/v/graphing-linear-functions-1](https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:linear-equations-graphs/x2f8bb11595b61c86:applying-intercepts-and-slope/v/graphing-linear-functions-1)

PROBLEMA

Rip van Winkle se durmió por un largo tiempo. Su barba medía 8 milímetros de largo cuando se fue a dormir, y cada semana que pasó creció 2 milímetros más.

Grafica la relación entre la longitud de la barba de Rip van Winkle (en milímetros) y el tiempo transcurrido (en semanas).

Cuando Rip van Winkle se quedó dormido su barba medía 8 milímetros. Esto es lo mismo que decir que cuando el **tiempo** era 0, la **barba** era 8.

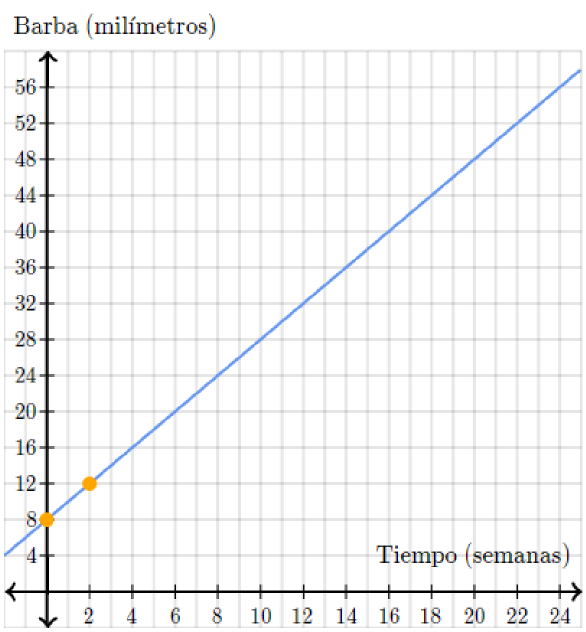
Por lo tanto, la gráfica de la relación debe pasar por el punto $(0, 8)$.

También nos dan la tasa de cambio de la relación: 2 milímetros por semana. Esto significa que cuando el **tiempo** aumenta en 1, la **barba** aumenta en 2.

Por lo tanto, la gráfica también debe pasar por el punto $(0+1, 8+2)$, que es el punto $(1, 10)$. Sin embargo, ¡este punto no aparece en la cuadrícula! Necesitamos encontrar un par equivalente de los cambios correspondientes que nos ayude a encontrar un punto que podamos graficar.

Observa, por ejemplo, que cuando el **tiempo** aumenta en 2, la **barba** aumenta en $2 \cdot 2 = 4$. Por lo tanto, la gráfica debe pasar por el punto $(0+2, 8+4)$, que es el punto $(2, 12)$.

Ahora podemos definir la gráfica de la relación.



PROBLEMA

Una organización benéfica debía vender algunos boletos a su recaudación para cubrir sus costos de producción. Después de vender 10 boletos, su *pérdida* neta era \$800dollar (debida a sus costos). Vendieron cada boleto en \$70.

Sea y la ganancia neta (en dólares) cuando han vendido x boletos.

Completa la ecuación para la relación entre la ganancia neta y el número de boletos vendidos.

La organización vendió boletos a un precio *fijo*, así que se trata de una relación lineal.

Interpretemos el significado de la información dada en términos de la recta que representa esta relación.

La organización vendió cada boleto en $\$70$. Esto corresponde a una pendiente de 70.

Después de vender 10 boletos, su *pérdida* neta todavía era $\$800$. Esto corresponde al punto $(10, -800)$.

Entonces la pendiente de la relación es 70, y la recta pasa por $(10, -800)$.

Calculemos la intersección con el eje y representada por el punto $(0, b)$, mediante la fórmula de la pendiente:

$$\frac{b-(-800)}{0-10} = 70$$

Al resolver esta ecuación, tenemos $b = -1500$.

[Mostrar la solución.]

Ahora que sabemos que la pendiente de la recta es 70, y la intersección con el eje y (ordenada al origen) es $(0, -1500)$, podemos escribir la ecuación de esa recta:

$$y = 70x - 1500$$

PROBLEMA

Hiro pintó su habitación. Después de pintar 3 horas a razón de 8 metros cuadrados por hora, le faltaban 28 metros cuadrados.

Sea y el área (en metros cuadrados) que falta pintar después de x horas.

Completa la ecuación para la relación entre el área y el número de horas.

Hiro pintó el cuarto a una tasa *constante*, así que se trata de una relación lineal.

Interpretemos el significado de la información dada en términos de la recta que representa esta relación.

Hiro pintó su habitación a razón de 8 metros cuadrados por hora. Esto corresponde a una pendiente con valor absoluto 8.

Observa que nos interesa el área *faltante* por pintar. Entonces nuestra recta decrece, lo que significa que la pendiente es -8.

Después de pintar 3 horas, a Hiro le restaban 28 metros cuadrados. Esto corresponde al punto $(3, 28)$.

Entonces la pendiente de la relación es -8, y la recta pasa por $(3, 28)$.

Calculemos la intersección con el eje y representada por el punto $(0, b)$, mediante la fórmula de la pendiente:

$$\frac{b-28}{0-3} = -8$$

Al resolver esta ecuación, tenemos $b = 52$.

[Mostrar la solución.]

Ahora que sabemos que la pendiente de la recta es -8, y la intersección con el eje y (ordenada al origen) es $(0, 52)$, podemos escribir la ecuación de esa recta:

$$y = -8x + 52$$

PROBLEMA

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:forms-of-linear-equations/x2f8bb11595b61c86:writing-slope-intercept-equations/v/construct-linear-equation-context

PROBLEMA

Encontrar el número que cumple que la suma de su doble y de su triple es igual a 100.

Solución

Si x es el número que buscamos, su doble es $2 \cdot x$ y su triple es $3 \cdot x$. La suma de los dos últimos debe ser 100:

$$2x + 3x = 100$$

Resolvemos la ecuación:

$$2x + 3x = 100$$

$$5x = 100$$

$$x = \frac{100}{5} = 20$$

El número buscado es 20.

En efecto, el doble de 20 es 40, su triple es 60 y ambos números suman 100.

PROBLEMA

Si Ana es 12 años menor que Eva y dentro de 7 años la edad de Eva es el doble que la edad de Ana, ¿qué edad tiene Eva?

Solución

Supongamos que x es la edad de Ana. Como Eva tiene 12 años más que Ana, su edad es $x+12$.

Dentro de 7 años, Ana tendrá la edad actual más 7, es decir, tendrá $x+7$. Del mismo modo, Eva tendrá $(x+12)+7=x+19$. Además, el doble de la edad de Ana será $2\cdot(x+7)$.

Debemos resolver la ecuación

$$2(x+7)=x+19$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}
&2x+14=x+19\\
&2x-x=19-14\\
&x=5
\end{aligned}$$

Por tanto, la edad actual de Ana es 5 y la de Eva es 17. Dentro de 7 años, Ana tendrá 12 y Eva tendrá 24 (el doble que Ana).

PROBLEMA

https://www.youtube.com/watch?v=gCqprj3jTzQ

PROBLEMA

Si 25,5 es el 15% de una cierta cantidad, ¿cuál es el 80% de dicha cantidad?

Solución

Si x es la cantidad, su 15% se calcula multiplicando x por 15 y dividiendo entre 100. Como el 15% de x es 25,5, tenemos la ecuación

$$\frac{x \cdot 15}{100} = 25{,}5$$

La resolvemos:

$$x = \frac{25{,}5 \cdot 100}{15} = 170$$

Ahora calculamos el 80% de 170 multiplicando por 80 y dividiendo entre 100:

$$\frac{170 \cdot 80}{100} = 136$$

Por tanto, el 80% es 136.

PROBLEMA

https://www.youtube.com/watch?v=WLsHpksYYe4

PROBLEMA

En el colegio de Miguel hay un total de 1230 estudiantes (alumnos y alumnas). Si el número de alumnas supera en 150 al número de alumnos, ¿cuántas alumnas hay en total?

Solución

La incógnita x del problema es el número total de alumnas.

Como hay 150 alumnas más que alumnos, el número de alumnos es el número de alumnas menos 150. Es decir, $x - 150$.

El número total de estudiantes es 1230 y es la suma del número de alumnas y de alumnos:

$$x + (x - 150) = 1230$$

Hemos escrito el paréntesis para que se vea claro que es la suma del número de alumnos y del de alumnas.

Resolvemos la ecuación:

$$x + x - 150 = 1230$$

$$2x - 150 = 1230$$

$$2x = 1230 + 150$$

$$2x = 1380$$

El 2 pasa dividiendo al otro lado:

$$x = \frac{1380}{2}$$

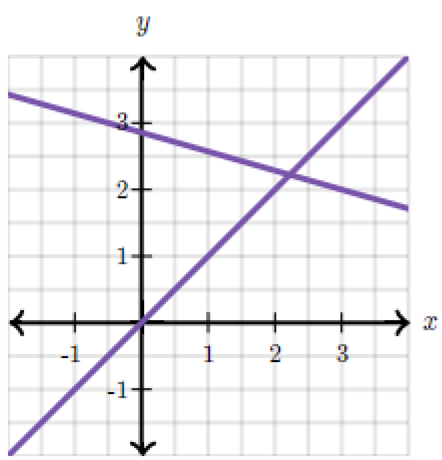
$$x = 690$$

Por tanto, el número de alumnas es 690.

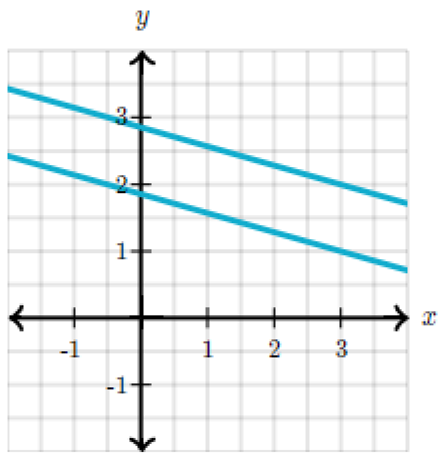
Sistemas de ecuaciones

Repaso sobre el número de soluciones a sistemas de ecuaciones.

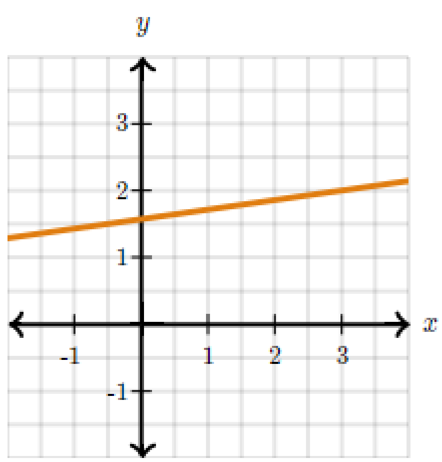
Un sistema de ecuaciones lineales usualmente tiene una sola solución, pero a veces puede no tener ninguna (rectas paralelas) o un número infinito (misma recta). En este artículo revisamos los tres casos.



Una solución. Un sistema de ecuaciones lineales tiene una solución cuando las gráficas se intersecan en un punto.



Sin solución. Un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución cuando las gráficas son paralelas.



Soluciones infinitas. Un sistema de ecuaciones lineales tiene soluciones infinitas cuando las gráficas son exactamente la misma recta.

Ejemplo de un sistema con una sola solución

Nos piden encontrar el número de soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$y = -6x + 8$$

$$3x + y = -4$$

Escribámoslas en forma pendiente-ordenada al origen:

$$y = -6x + 8$$

$$y = -3x - 4$$

Ya que las pendientes son distintas, las rectas deben intersecarse.

Dado que las rectas se intersecan en un punto, hay una sola solución al sistema de ecuaciones que representan.

Ejemplo de un sistema sin solución

Nos piden encontrar el número de soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$y = -3x + 9$$

$$y = -3x - 7$$

Sin graficar estas ecuaciones, podemos observar que ambas tienen una pendiente de -3. Esto significa que las rectas son paralelas. Dado que sus ordenadas al origen son diferentes, sabemos que estas rectas no están la una sobre la otra.

No hay solución para este sistema de ecuaciones.

Ejemplo de un sistema con soluciones infinitas

Nos piden encontrar el número de soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$-6x + 4y = 2$$

$$3x - 2y = -1$$

Curiosamente, si multiplicamos la segunda ecuación por -2, obtenemos la primera ecuación:

$$3x - 2y = -1$$

$$-2(3x - 2y) = -2(-1)$$

$$-6x + 4y = 2$$

En otras palabras, las ecuaciones son equivalentes y comparten la misma gráfica. Cualquier solución que funcione para una de las ecuaciones también funcionará para la otra, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

Resolución de sistemas de ecuaciones

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones, en este artículo mostraremos tres de los más utilizados.

Método de sustitución

1 Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

2 Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo un ecuación con una sola incógnita.

3 Se resuelve la ecuación.

4 El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.

5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Método de igualación

1 Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

2 Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.

3 Se resuelve la ecuación.

4 El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.

5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Método de reducción

1 Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.

2 La restamos o sumamos de forma que desaparece una de las incógnitas.

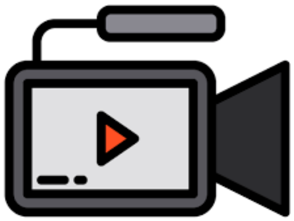
3 Se resuelve la ecuación resultante.

4 El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Verificar la solución de un sistema de ecuaciones:

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:systems-of-equations/x2f8bb11595b61c86:introduction-to-systems-of-equations/v/testing-a-solution-for-a-system-of



PROBLEMA

En el aula de Alberto hay un total de 27 alumnos, habiendo el doble de chicas que de chicos. ¿Cuántos chicos y chicas hay en la clase de Alberto?

Solución

Llamaremos x al número de chicas e y al número de chicos.

El número total de alumnos es la suma del número de chicos y del de chicas, lo cual se traduce algebraicamente como

$$x + y = 27$$

Por otro lado, el número de chicas es el doble que el de chicos. Esto significa,

$$x = 2y$$

El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + y & = & 27 \\ x & = & 2y \end{array}\right.$$

La solución del sistema es

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 18 \\ y & = & 9 \end{array}\right.$$

Por tanto, en el aula de Alberto hay 99 chicos y 1818 chicas.

PROBLEMA

Se buscan dos números cuya suma sea 24 y cuya resta sea 2. ¿Qué números son?

Solución

Llamaremos x a e y a cada uno de los números.

El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es

$$\begin{cases} x + y &= 24 \\ x - y &= 2 \end{cases}$$

La solución del sistema es

$$\begin{cases} x &= 13 \\ y &= 11 \end{cases}$$

Por tanto, los números que se buscan son 11 y 13.

PROBLEMA

https://www.youtube.com/watch?v=gd95JhLC4LU

PROBLEMA

La edad actual de Maite es el triple que la de su hija Ana y, dentro de 10 años, la edad de Maite será el doble que la de Ana. ¿Qué edad tiene Maite?

Solución

Llamaremos x a la edad actual de Maite e y a la edad actual de su hija Ana.

La edad de Maite es el triple que la de Ana: $x = 3 \cdot y$.

Dentro de 10 años, la edad de Maite será $x + 10$ y la de Ana será $y + 10$. Como la de Maite será el doble que la de Ana,

$$x + 10 = 2 \cdot (y + 10)$$

¡No olvidéis el paréntesis!

Operamos un poco en la ecuación:

$$x + 10 = 2y + 20$$

$$x - 2y = 10$$

El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es

$$\begin{cases} x & = & 3y \\ x - 2y & = & 1 \end{cases}$$

La solución del sistema es

$$\begin{cases} x & = & 30 \\ y & = & 10 \end{cases}$$

Por tanto, la edad de Maite es 30.

PROBLEMA

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:systems-of-equations/x2f8bb11595b61c86:systems-of-equations-word-problems/v/understanding-systems-of-equations-example?modal=1

PROBLEMA