

INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA LA SAGRADA FAMILIA
MATEMÁTICAS GRADO 9
FUNCIÓN LINEAL

EXPLICACIÓN

1 Lea la siguiente información.

Las funciones que tienen como gráfica una línea recta se pueden clasificar en dos tipos:

Funciones lineales: si la recta pasa por el origen del plano cartesiano.
En este caso la función se puede escribir algebraicamente así:

$$f(x) = mx, \text{ donde } m \text{ es una constante.}$$

Funciones afines: si la recta no pasa por el origen del plano cartesiano.
En este caso la función se puede escribir algebraicamente así:

$$f(x) = mx + b, \text{ donde } m \text{ y } b \text{ son constantes.}$$

En lugar de escribir $f(x)$ podemos escribir y , pues $y = f(x)$



Una función se puede representar de las siguientes maneras:

- **Algebraica:** usando la fórmula.
- **Verbal:** escribiendo una oración para describirla.
- **Gráfica:** realizando su gráfica sobre el plano cartesiano.
- **Númerica:** usando la tabla de valores.



Es posible representar una función de las siguientes maneras:

Algebraica

Usando una fórmula:

$$f(x) = 3x + 4$$

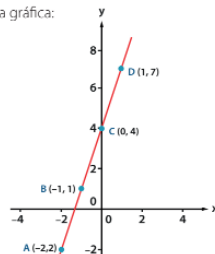
Verbal

Con palabras:

f es la función "multiplicar por 3 y luego sumar 4"
Relación de la variable x .

Visual

Usando una gráfica:



Númerica

Usando una tabla de valores:

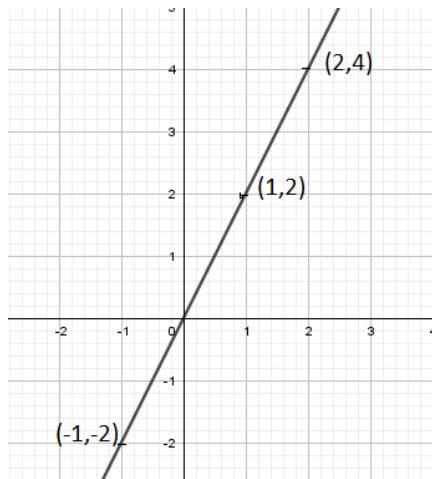
x	$f(x)$
-2	-2
-1	1
0	4
1	7

Ejemplo:

Representación algebraica: $y = 2x$

Representación verbal: El doble de un número

Representación gráfica:

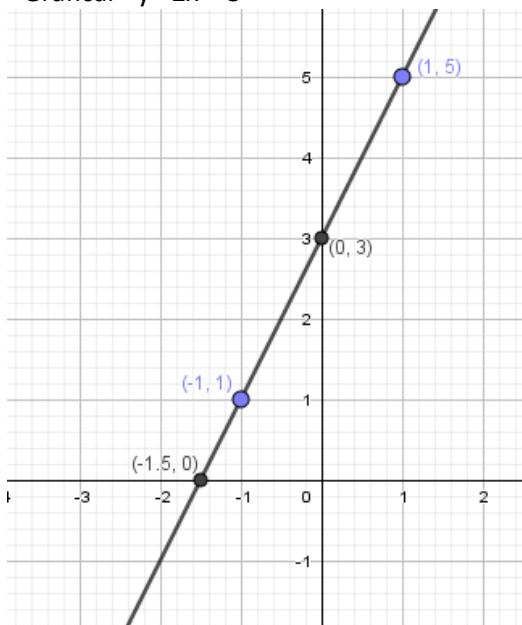


Representación numérica:

x	$y=2(x)$	y	(x,y)
0	$2(0)$	0	(0,0)
1	$2(1)$	2	(1,2)
-1	$2(-1)$	-2	(-1,2)

Graficar: El doble de un número aumentado en 3

Graficar $y = 2x + 3$



x	$y=2(x) + 3$	Y	(x,y)
0	$2(0) + 3$	3	(0,3)
1	$2(1) + 3$	5	(1,5)
-1	$2(-1) + 3 = -2 + 3$	1	(-1,1)
-1.5	$2(-1.5) + 3 = -3 + 3$	0	(-1.5,0)

Lea la información y observe con atención el ejemplo.

En la expresión $y = mx + b$
se identifica lo siguiente:



m es la pendiente o
inclinación de la recta
 b es el punto de corte con
el eje y o y -intercepto.



PENDIENTE DE UNA RECTA

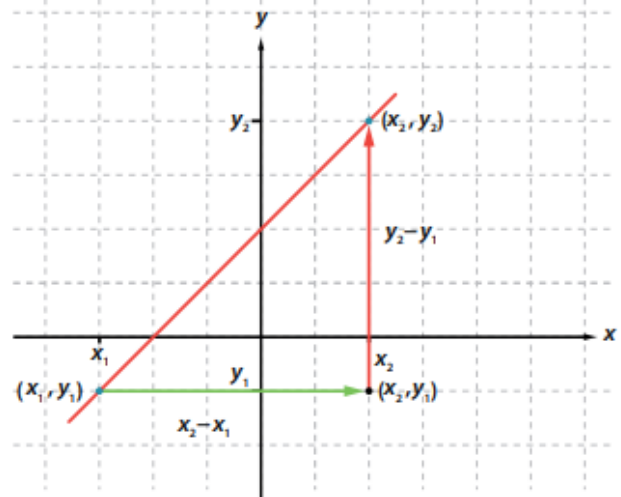
Qué es la pendiente de una recta: <https://www.youtube.com/watch?v=44z-uD5IR-0>

Demostración: <https://www.youtube.com/watch?v=xzEITAyMOK>

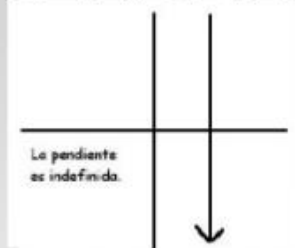
Para calcular la pendiente de una recta
que pasa por dos puntos $P(x_1, y_1)$ y
 $Q(x_2, y_2)$ se usa la siguiente expresión

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Esta se deduce a partir de la
siguiente gráfica.

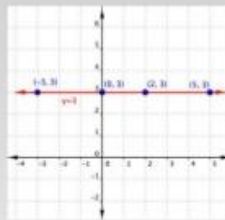
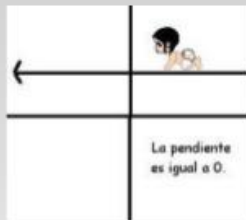


PENDIENTE INDETERMINADA O INDEFINIDA



- Cuando la recta es vertical, paralela al eje «y» la pendiente es **INDETERMINADA** es decir no se puede definir

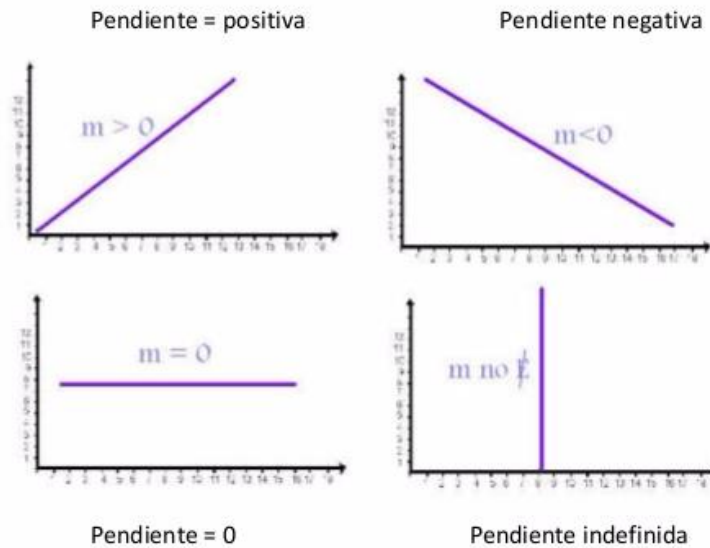
PENDIENTE CERO



- Cuando la pendiente es **CERO**, es decir $m = 0$, la recta es horizontal, paralela al eje x



Tipos de Pendiente



Ejemplo:

Identificar la pendiente y punto de corte con el eje y:

- a) $Y = -1/2 x - 3$ Pendiente = $-1/2$ Corte con el eje y = -3
- b) $Y = 4x + 2/3$ Pendiente = 4 Corte con el eje y = $2/3$
- c) $Y = -2x + 4$ Pendiente = -2 Corte con el eje y = 4
- d) $Y = 2/5 x - 5$ Pendiente = $2/5$ Corte con el eje y = -5
- e) $Y = -1/3 x - 2/6$ Pendiente = $-1/3$ Corte con el eje y = $-2/6$

La pendiente indica las unidades que se inclina la recta; así en $y = -3x - 1$ la pendiente es -3 , lo cual se puede escribir:

$$m = -3 = \frac{-3}{1}$$

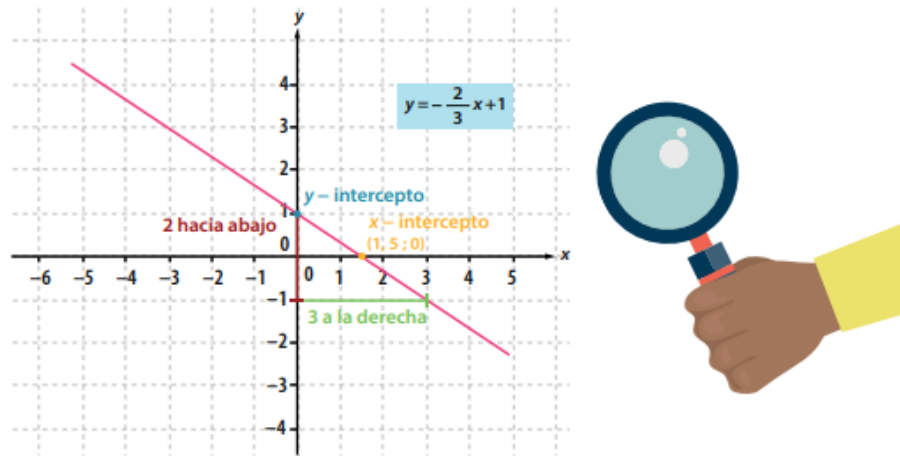
Movimiento vertical (en el eje y, arriba o abajo).

Movimiento horizontal (en el eje x derecha).

Así, es posible elaborar la gráfica de una línea recta teniendo en cuenta la pendiente y el y-intercepto



Realice las gráficas de las siguientes líneas rectas usando la pendiente y el y-intercepto. Luego, ubique sobre la gráfica el punto de corte con el eje de las x y escriba sus coordenadas. Observe el ejemplo.

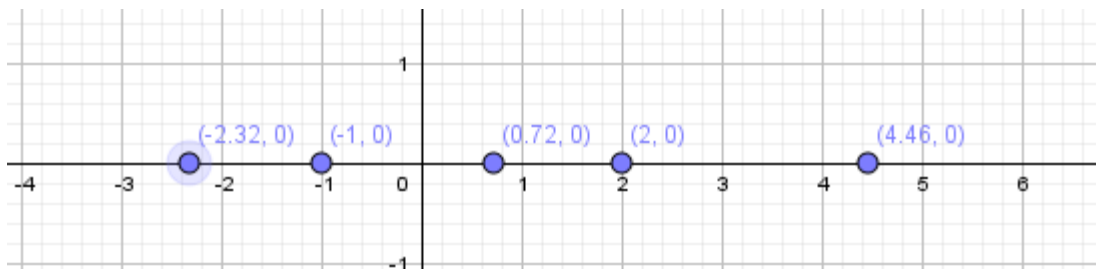


En la recta $y = -\frac{2}{3}x + 1$ la pendiente es $-\frac{2}{3}$ y el corte con el eje y es 1.

Por lo tanto nos ubicamos en 1 sobre el eje y y luego trazamos la pendiente, recordando que $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$. Como la pendiente es el desplazamiento en y con respecto a x , entonces, estando en 1 sobre el eje y , me desplazo hacia abajo 2 unidades (-2), y luego hacia la derecha 3 unidades (3). He llegado a otro punto de la recta. Con solo dos puntos puedo trazar la recta sin problema alguno. Así que lo hago, obteniendo la gráfica anterior.

Cómo saber cuál es el punto en el que la recta corta al eje x ?

Si observamos bien y recordamos cómo ubicar parejas ordenadas en un plano cartesiano, afirmaremos que todo punto en el eje x tiene como valor de $y=0$. Emjs:



Por lo anterior, para encontrar el corte con el eje x , debemos hacer siempre $y=0$

$$y = -\frac{2}{3}x + 1$$

$$0 = -\frac{2}{3}x + 1$$

$$0 - 1 = -\frac{2}{3}x + 1 - 1$$

$$-1 = -\frac{2}{3}x$$

$$\frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{(-\frac{2}{3})x}{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{3}{2} = x$$

$$1.5 = x$$

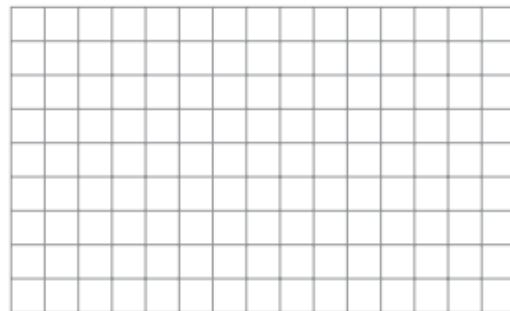
Concluimos que la recta corta al eje x en el punto 1.5 . Si observamos la gráfica anterior, lo comprobamos.

Halle el punto de corte con el eje x (x - intercepto) de manera algebraica en cada una de las siguientes rectas.



No olvide que cuando la gráfica corta el eje x, el valor de y es cero.
 $0 = mx + b$

1 $y = x - 1$



Solución:

$$y = x - 1$$

$$0 = x - 1$$

$$0 + 1 = x - 1 + 1$$

$$1 = x$$

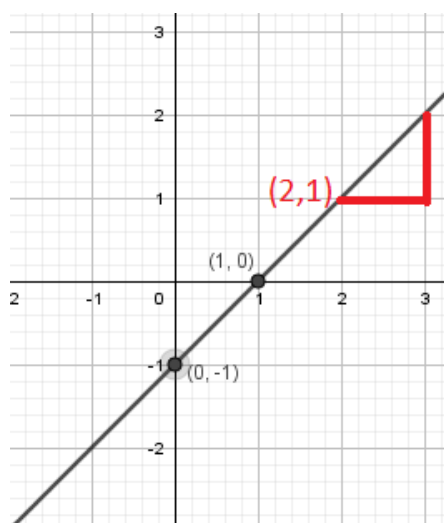
Se forma la pareja (1,0)

Tenemos entonces la siguiente información :

- Es una recta por ser una ecuación lineal: Grado del polinomio = 1
- La recta es creciente porque la pendiente es positiva
- La pendiente es 1 ya que $y=x-1$ lo puedo expresar como $y= 1x-1$
- La recta corta al eje y en el punto -1, formándose la pareja ordenada (0,-1)

- La recta corta al eje x en el punto 1, formándose la pareja ordenada (1,0)

Hagamos la gráfica:



X	y= x-1	y	(x,y)
0	y= 0-1 = -1	-1	(0,-1)
1	Y=1-1=0	0	(1,0)

$$m = \frac{2 - 1}{3 - 2}$$

$$m = \frac{1}{1}$$

$$m = 1$$

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.
Luego, elabore la gráfica de la recta correspondiente.



1 M(2,3) y P(-1,4)

En(2,3)(-1,4)

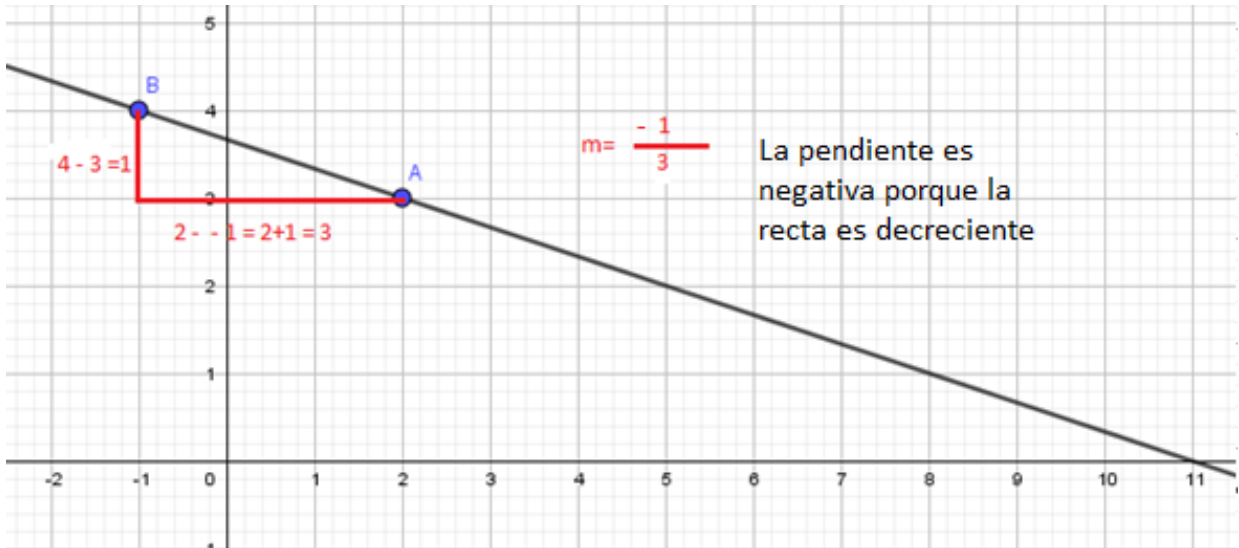
$$x_1 = 2$$

$$y_1 = 3$$

$$x_2 = -1$$

$$y_2 = 4$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 3}{-1 - 2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$



Conocida la pendiente y un punto de la recta, podemos hallar la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

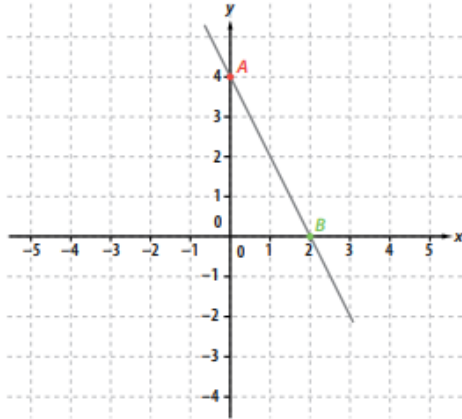
Tomemos por ejemplo el punto A (2,3) como la pendiente es $-1/3$ la ecuación queda:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 3 &= -\frac{1}{3}(x - 2) \\ y - 3 &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ y - 3 + 3 &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 3 \\ y &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{3}{1} \\ y &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{9}{3} \\ y &= -\frac{1}{3}x + \frac{2+9}{3} \\ y &= -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3} \end{aligned}$$

Así la ecuación de la recta es: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

Escriba las coordenadas de los puntos marcados sobre cada recta y halle la pendiente.

1



La recta corta al eje y en el punto 4 formando la pareja ordenada (0,4)

$$A = (0,4)$$

La recta corta al eje x en el punto 2 formándose la pareja ordenada (2,0)

$$B = (2,0)$$

Con las dos parejas ordenadas se puede calcular la pendiente:

$$(0,4)(2,0)$$

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = 4$$

$$x_2 = 2$$

$$y_2 = 0$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 4}{2 - 0} = \frac{-4}{2} = -2$$

Por lo anterior, como $b=4$ y $m=-2$ entonces la ecuación de la recta es $y=mx + b = -2x + 4$

Es decir $y = -2x + 4$

1 Lea la siguiente información y revise el ejemplo.

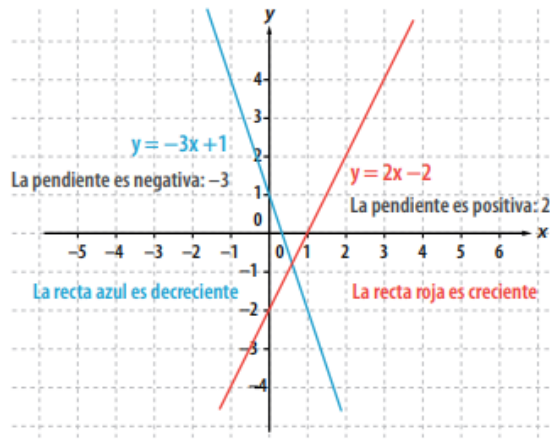


Cuando la pendiente de una recta es **positiva** (+), se dice que la recta es **creciente**.



Cuando la pendiente de una recta es **negativa** (-), se dice que la recta es **decreciente**.

Por ejemplo, la recta $y = 2x - 2$ y la recta $y = -3x + 1$.



2 Examine las siguientes rectas y determine si son crecientes o decrecientes.

a) $y = -x + 1$

Escriba el valor de la pendiente $m =$ _____

La recta es _____

b) $y = 2x - 7$

Escriba el valor de la pendiente $m =$ _____

La recta es _____

c) $y = \frac{3}{4}x - 3$

Escriba el valor de la pendiente $m =$ _____

La recta es _____

Recuerde que en la ecuación de la recta el **valor de la pendiente** es el número que acompaña a x .



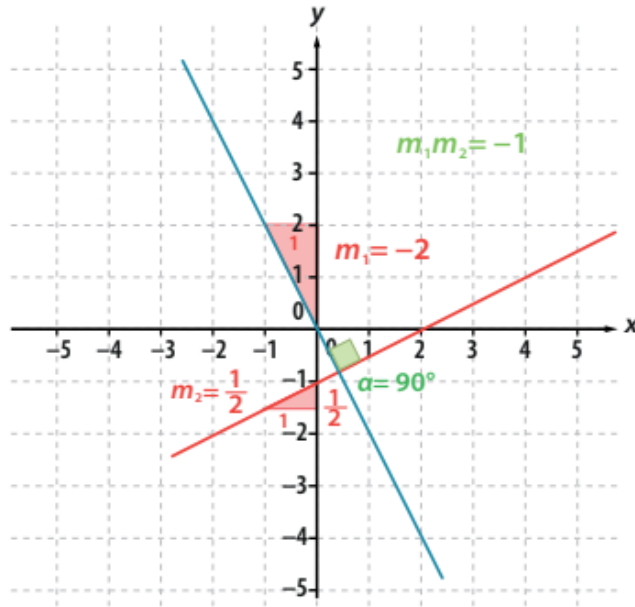
En $y = -x + 1$ la pendiente es $m = -1$ por tanto la recta es decreciente

En $y = 2x - 7$ la pendiente es $m = 2$ por tanto la recta es creciente

En $y = \frac{3}{4}x - 3$ la pendiente es $m = \frac{3}{4}$ por tanto la recta es creciente

▶ Lea la siguiente información.

Dos rectas son **perpendiculares** si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a -1 .



▶ Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, 4)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $y = 2x - 3$.

Recordemos que si dos rectas son paralelas, tienen la misma pendiente y si son perpendiculares, el producto o multiplicación entre ellas da como resultado -1

$$m_1 = \frac{a}{b}$$
$$m_2 = -\frac{b}{a}$$
$$m_1 \cdot m_2 = \frac{a}{b} \left(-\frac{b}{a} \right) = -\frac{a \cdot b}{b \cdot a} = -1$$

En la recta $y=2x-3$ la pendiente es 2 . Recordando que las rectas son perpendiculares:

Si $m_1 = 2 = \frac{2}{1}$ la pendiente de la otra recta es $m_2 = -\frac{1}{2}$

Conocida la pendiente y un punto de la recta, podemos hallar la ecuación:

punto(1,4)

$$m = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y - 4 + 4 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 4$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{8}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1+8}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

Resumen

Una función se puede representar de las siguientes maneras:

- **Algebraica:** usando la fórmula.
- **Verbal:** escribiendo una oración para describirla.
- **Gráfica:** realizando su gráfica sobre el plano cartesiano.
- **Numérica:** usando la tabla de valores.

Una función **lineal** es de la forma $y = mx$

Una función **afin** es de la forma $y = mx + b$

En la ecuación $y = mx + b$, m es la pendiente y b es el y -intercepto.

Las coordenadas del y -intercepto son $(0, b)$

Las coordenadas de x -intercepto son $(-\frac{b}{m}, 0)$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos de coordenadas

$P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ está dada por la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Cuando $m > 0$ la recta es **creciente**.

Cuando $m < 0$ la recta es **decreciente**.



Conocida la pendiente y un punto de la recta, podemos hallar la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

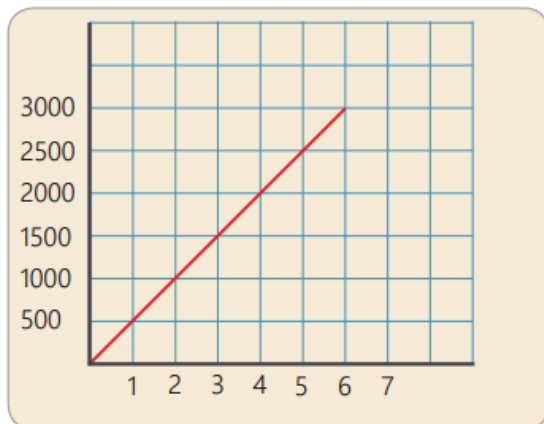
Rectas Paralelas – Rectas Perpendiculares

1. Dos rectas son **paralelas** sólo si sus pendientes son iguales.
2. Dos rectas son **perpendiculares** sólo si el producto de sus pendientes es igual a -1 .



SITUACIONES PROBLEMA

Observa la siguiente gráfica y con base en la situación, responde:



Situación

Un operador de telefonía móvil cobra \$500 por minuto

Relación: costo del minuto por número de minutos por llamada.

Qué se representa en el eje x: Minutos por llamada

Qué se representa en el eje y: Costo de la llamada

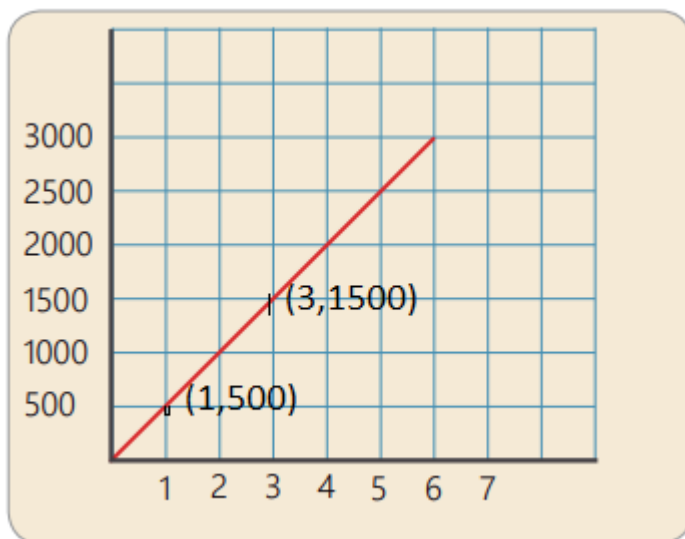
Variable independiente: Cantidad de minutos

Variable dependiente: Costo de la llamada

La recta es creciente o decreciente: Es creciente e indica que a más minutos mayor costo.

Qué representa la pareja ordenada (0,0)? Significa que si no hay minutos consumidos, no hay que pagar nada.

Según el gráfico, determine 2 parejas ordenadas:



Qué indica la pareja ordenada (3,1500): Indica que por 3 minutos se paga \$1500

Calcule la pendiente:

$$(1, 500)(3, 1500)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{1500 - 500}{3 - 1}$$

$$m = \frac{1000}{2} = 500$$

$$m = 500 = \frac{500}{1}$$

Qué significa que la pendiente sea 500: Como la pendiente es el cambio en y con respecto a x , entonces se interpreta que por 1 minuto se paga \$500

Escriba la ecuación que representa la recta: Podemos observar que la recta pasa por el origen, quiere decir entonces que en $y=mx+b$ el valor de b es cero, ya que recordemos que b representa el corte de la recta con el eje y .

Como $m=500$, $b=0$ y decimos que x representa la cantidad de minutos, y y el costo de la llamada, entonces la ecuación de la recta es $y=500x$

Una fábrica recibe \$25 por cada unidad de su producción vendida. Tiene un costo marginal de \$15 por artículo y un costo fijo de \$1200

¿Cuál es el nivel de ingresos n , si vende 200 artículos, 300 artículos y 100 artículos?

Veamos primero el significado de las palabras involucradas en el problema:

El nivel de ingresos, sinónimo de beneficio, es la diferencia entre lo que entra a una empresa y lo que sale. En otros términos, el beneficio es la diferencia entre las ventas y los costos.

$$\text{INGRESOS} = \text{BENEFICIO} = \text{VENTAS} - \text{COSTOS}$$

VENTAS: Es el producto de la cantidad vendida por el valor de cada unidad.

$$\text{VENTAS} = \text{PRECIO} \times \text{CANTIDAD}$$

El costo marginal es el costo de cada unidad extra que se fabrica.

COSTOS: Es la suma del costo fijo (alquiler del local) y del costo variable.

$$\text{COSTOS} = \text{COSTO FIJO} + \text{COSTO MARGINAL} \times \text{CANTIDAD.}$$

En resumen:

$$\text{NIVEL DE INGRESOS O BENEFICIO} = \text{PRECIO} \times \text{CANTIDAD} - (\text{COSTO FIJO} + \text{COSTO MARGINAL} \times \text{CANTIDAD})$$

Ahora, reemplacemos los datos en la fórmula:

$$\text{BENEFICIO} = \text{PRECIO} \times \text{CANTIDAD} - (\text{COSTO FIJO} + \text{COSTO MARGINAL} \times \text{CANTIDAD})$$

$$\text{BENEFICIO} = 25 \times \text{CANTIDAD} - (1200 + 15 \times \text{CANTIDAD})$$

Para que quede más sencillo, a la variable cantidad la podemos llamar x

$$\text{BENEFICIO} = 25x - (1200 + 15x)$$

El problema nos pregunta por el nivel de ingreso, o sea el beneficio obtenido por 200, 300 o 100 unidades. Entonces, sólo falta sustituir en esta expresión el valor de "x" y hacer las operaciones.

Calculemos el beneficio por la venta de 200 artículos:

$$\text{BENEFICIO} = 25(200) - (1200 + 15(200))$$

$$\text{BENEFICIO} = 5000 - (1200 + 3000)$$

$$\text{BENEFICIO} = 5000 - (4200)$$

$$\text{BENEFICIO} = 800. \text{ En resumen, la empresa gana 800 pesos.}$$

Si lo formamos como pareja ordenada sería (#artículos, beneficio): (200,800)

Ahora calculemos el beneficio por la venta de 300 artículos:

$$\text{BENEFICIO} = 25(300) - (1200 + 15(300))$$

$$\text{BENEFICIO} = 7500 - (1200 + 4500) = 1800 \quad \text{La empresa gana 1800 pesos.}$$

Si lo formamos como pareja ordenada sería (#artículos, beneficio): (300,1800)

Ahora calculemos el beneficio por la venta de 100 artículos:

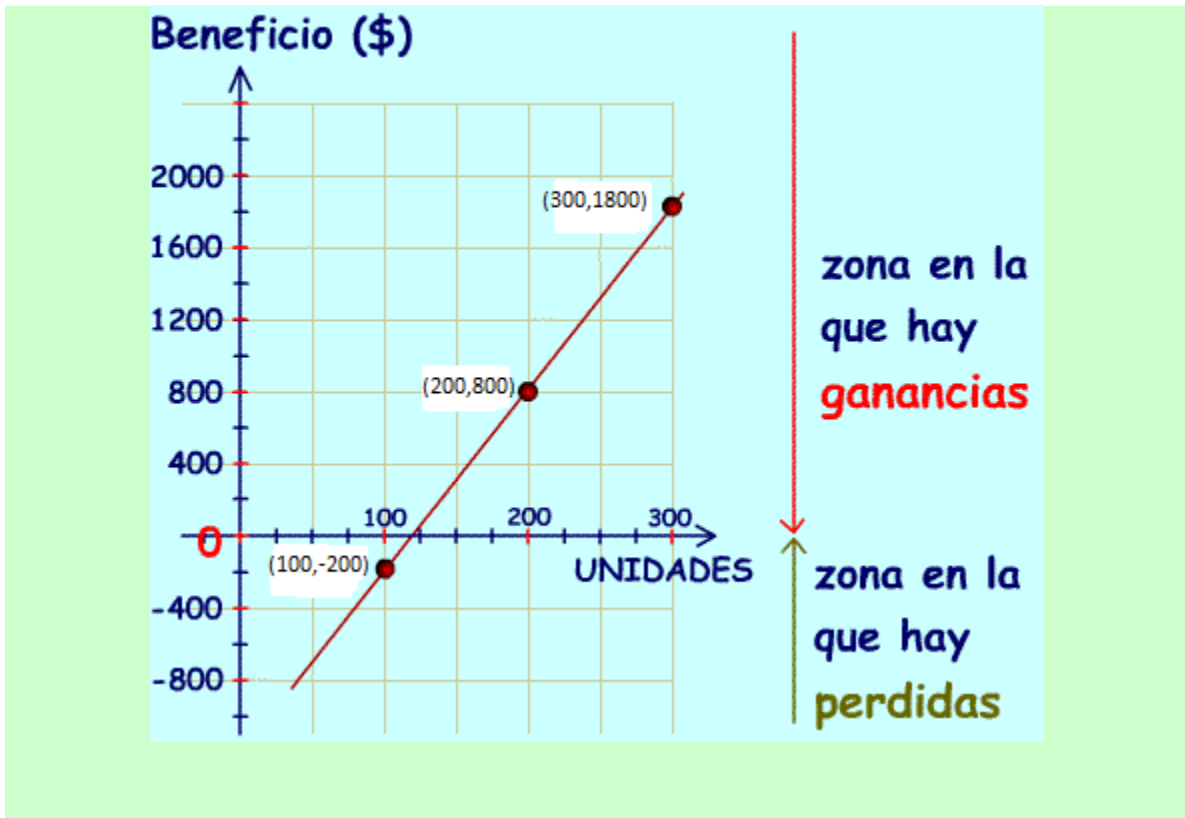
$$\text{BENEFICIO} = 25(100) - (1200 + 15(100))$$

$$\text{BENEFICIO} = 2500 - (1200 + 1500)$$

$$\text{BENEFICIO} = 2500 - 2700$$

$$\text{BENEFICIO} = -200 \quad \text{La empresa pierde 200 pesos.}$$

Si lo formamos como pareja ordenada sería (#artículos, beneficio): (100,-200)



TEORÍA, EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

<https://www.problemasyeecuaciones.com/funciones/lineales/funcion-lineal-problemas-resueltos-grafica-pendiente-interseccion-ejes-paralelas.html>



<https://www.youtube.com/watch?v=7av0wVoARIA>

<https://www.youtube.com/watch?v=uBTNCm8Vp6w>