INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA LA SAGRADA FAMILIA
MATEMÁTICAS GRADO 9

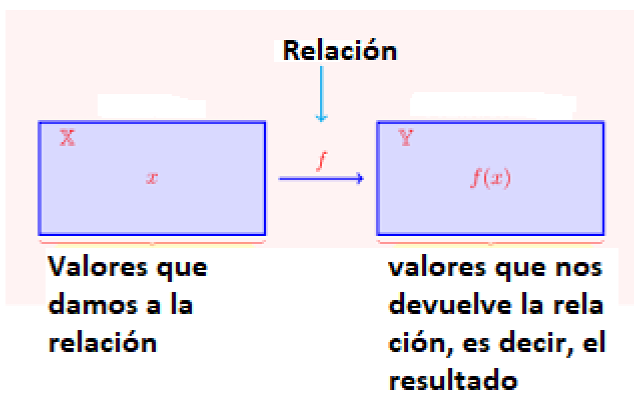
RELACIONES Y FUNCIONES

EXPLICACIÓN

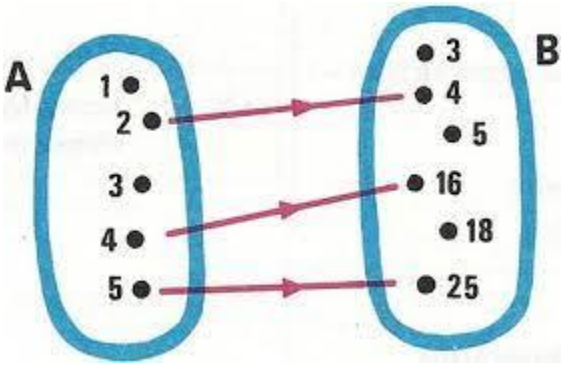
El estudio de relaciones y funciones es de suma importancia puesto que no sólo se usan en matemáticas sino en nuestra vida cotidiana, estas nos ayudan a describir diferentes situaciones que involucran valores numéricos. Las funciones y relaciones son de gran utilidad por ejemplo para resolver problemas de finanzas, economía, geología y/o cualquier área en la que se tengan que relacionar variables.

Es importante conocer la diferencia entre una relación y una función.
Una relación es una correspondencia de elementos entre dos conjuntos.
Una función es una relación en donde a cada elemento del conjunto de partida le corresponde uno y solo un elemento del conjunto de llegada.

Veamos ciertas relaciones:



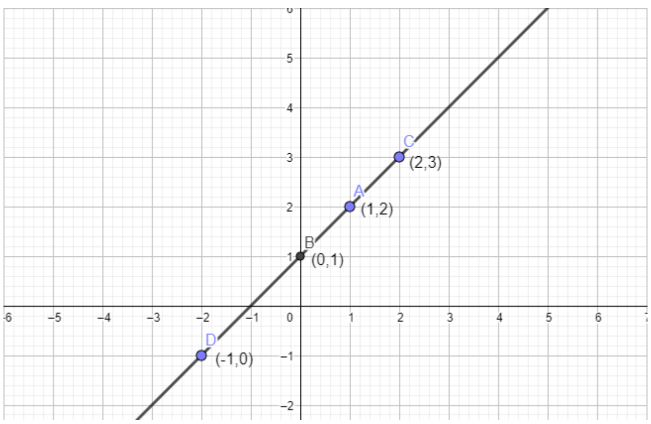
En R={(2,6),(4,12),(7,21),(5,15)} cuál es la relación entre x y y para que se pueda formar la pareja ordenada (x,y)? Se observa que el valor de y es el triple del valor de x. Por lo tanto la relación definida es "ser la tercera parte de" porque 2 es la tercera parte de 6, 4 es la tercera parte de 12, 7 es la tercera parte de 21 y 5 es la tercera parte de 15.



Se observa que los valores de B que se relacionan con los valores de A, son “el cuadrado de”.

4 es el cuadrado de 2, es decir $2^2=4$
16 es el cuadrado de 4, es decir $4^2=16$
25 es el cuadrado de 5, es decir $5^2=25$

Sin embargo, como la relación está establecida de A hacia B, no podemos hablar del cuadrado de, sino de la raíz cuadrada de. Veamos:
2 es la raíz cuadrada de 4, 4 es la raíz cuadrada de 16 y 5 es la raíz cuadrada de 25.



Se observa que si a x se le suma 1 se obtiene el valor de y, es decir

y= x+1
1=0+1
0=-1+1
2= 1+1
3=2+1

Con palabras: Un número es igual a otro incrementado en 1.

Existen diferentes formas de representar relaciones y funciones:

- Verbalmente
- Tabularmente (tabla)
- Analíticamente o algebraicamente
- Gráficamente

Veamos estas representaciones:

- **Representación verbal**
  - Las **funciones se pueden expresar de forma verbal**: Se nos presenta como un texto en el que se expresa una descripción de la función en palabras, de forma detallada. Esta forma describe la relación en lenguaje literal de forma muy detallada para que se pueda entender y simbolizar.

- **Representación numérica**
  - Para **representar una función de forma numérica** precisamos una tabla de valores en la que a cada valor de x, vemos que le corresponde uno de y. A la izquierda solemos encontrar o escribir números reales(o el que necesitemos) y a la derecha la proyección del valor que le damos a x.

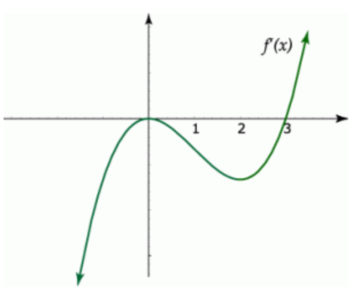
x	y
2	4.5
1	9
0	3
-1	1.5
-2	0

- **Representación algebraica**
  - Si queremos **representar las funciones matemáticas de forma algebraica** debemos explicar en qué consiste la función con una ecuación explícita que explique la relación que existe entre las dos magnitudes (x,y). De esta forma, podemos conocer las propiedades características de la función.

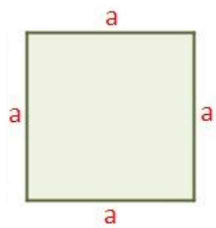
  Ejms: $y=mx+b$ $y= x/4$ $y=x+2$ $y=x^3$

- **Representación gráfica**
  - La **forma visual de las funciones matemáticas** es la que se presenta mediante una gráfica en el eje cartesiano. Existen varios tipos de funciones y sus gráficas que poseen diferentes propiedades según las características que poseen.

  Para saber **cómo representar funciones matemáticas** de forma visual debes conocer las formas de representación anteriores, ya que son las que te llevarán por el camino para hacerlo. Por un lado, puedes utilizar la tabla de valores para conocer cuál es de valor de cada uno de los puntos que forma la gráfica. Por otro lado, también podemos realizar la **representación visual** de la gráfica a través de la **representación algebraica**, realizando las operaciones que vemos en la función, y detectando el valor de y por cada valor que le damos a x.



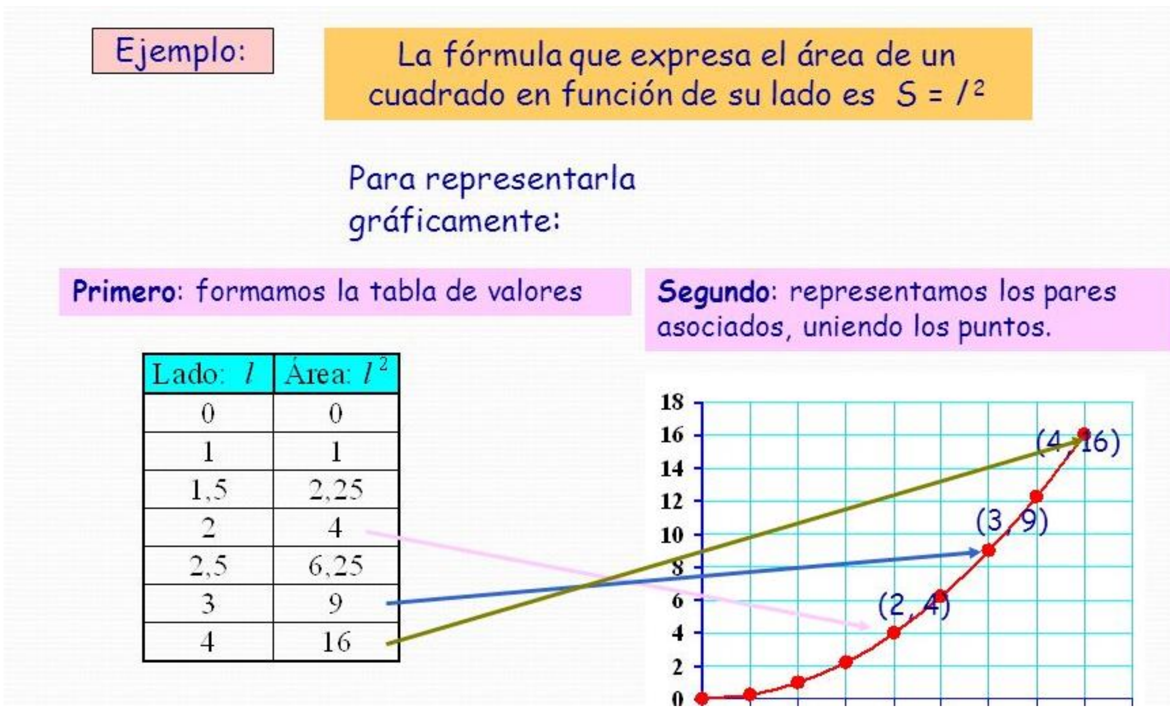
Veamos un ejemplo de los diferentes tipos de representación:



El **área** de un **cuadrado** se calcula a partir de uno de sus lados (a). Es el producto de la base por la altura del cuadrado, ya que al ser ambas iguales, el área será un lado al cuadrado.

$$\acute{A}rea = a^2$$

siendo a un lado del cuadrado



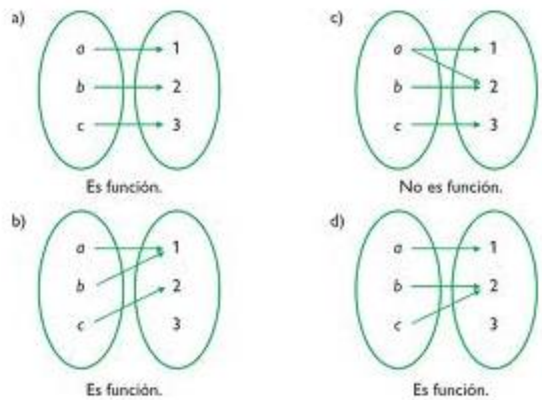
Lado: l	Área: l^2
0	0
1	1
1,5	2,25
2	4
2,5	6,25
3	9
4	16

Ejemplo:

https://www.youtube.com/watch?v=th5tNW6EYQ4

Función: Una función es una relación definida entre dos conjuntos, conjunto de partida y conjunto de llegada, en la cual a cada elemento del conjunto de partida le corresponde o se relaciona con uno y solo un elemento del conjunto de llegada.

Ejemplos:



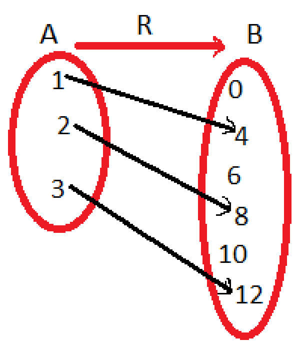
Ejm: Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {0, 4, 6, 8, 10, 12} y la relación de A hacia B "ser la cuarta parte de".

$R_{A\rightarrow B}$= "Ser la cuarta parte de"

Conjunto de partida: A

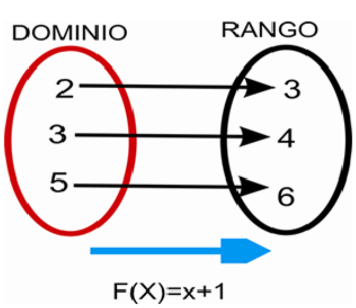
Conjunto de llegada o codominio: B

Conjunto relación $R_{A\rightarrow B=}\{(1,4),(2,8),(3,12)\}$ Este conjunto está formado por las parejas ordenadas que cumplen la relación.



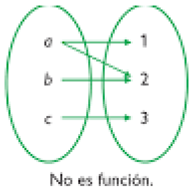
Diferencia entre relación y función:

Si al hablar de relación y de función es hablar de dependencia, toda relación es una función? Toda función es una relación? Respondamos las anteriores preguntas interpretando las siguientes representaciones:

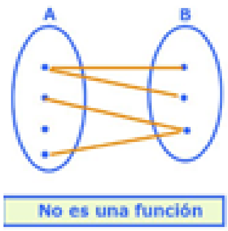


FUNCIÓN

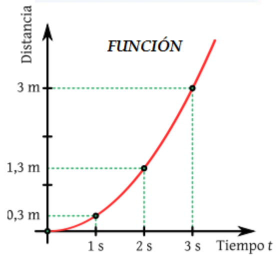
Se dice que es función, y observamos que todos los elementos del conjunto de partida están relacionados con uno y solo un elemento del conjunto de llegada.



Se dice que no es función, y evidentemente observamos que el elemento ***a*** se relaciona con más de un elemento del otro conjunto.



Relación de A en B
Se dice que no es función y evidentemente observamos que hay un elemento en el conjunto de partida (A) que no está relacionado con ningún elemento del conjunto de llegada. Además, el primer elemento de A se relaciona con dos elementos de B.



A cada valor de **x** (tiempo), le corresponde un solo valor de **y** (distancia)

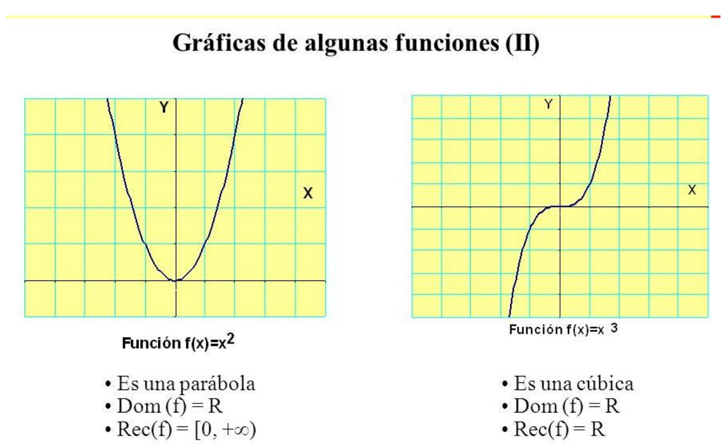
x	1	2	2	4	5
y	2	3	5	6	0

no función

A={1,2,4,5} B={2,3,0,6,5,9} Relación de A en B

No es función, porque si observamos bien, a x=2 le corresponden dos valores de y, formándose las parejas ordenadas (2,3),(2,5)

Veamos otras funciones:

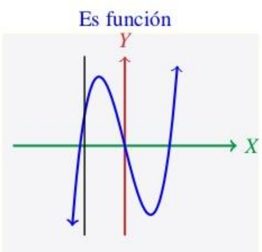


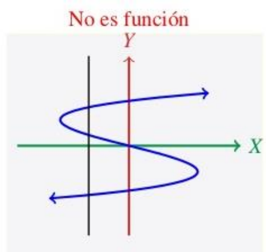
CONCLUSIÓN: Todas las anteriores representaciones corresponden a relaciones establecidas entre dos conjuntos, pero no todas son funciones, por ello, toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

CÓMO IDENTIFICAR FÁCILMENTE SI UNA GRÁFICA ES FUNCIÓN O NO:

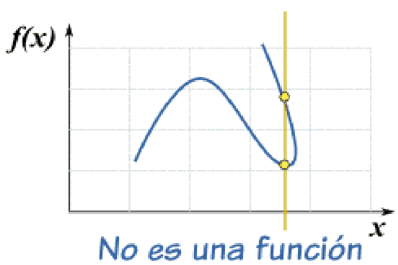
https://www.youtube.com/watch?v=XRc9DiEvDKM

Apliquemos el método de la recta vertical, para verificar si las gráficas dadas son o no una función:

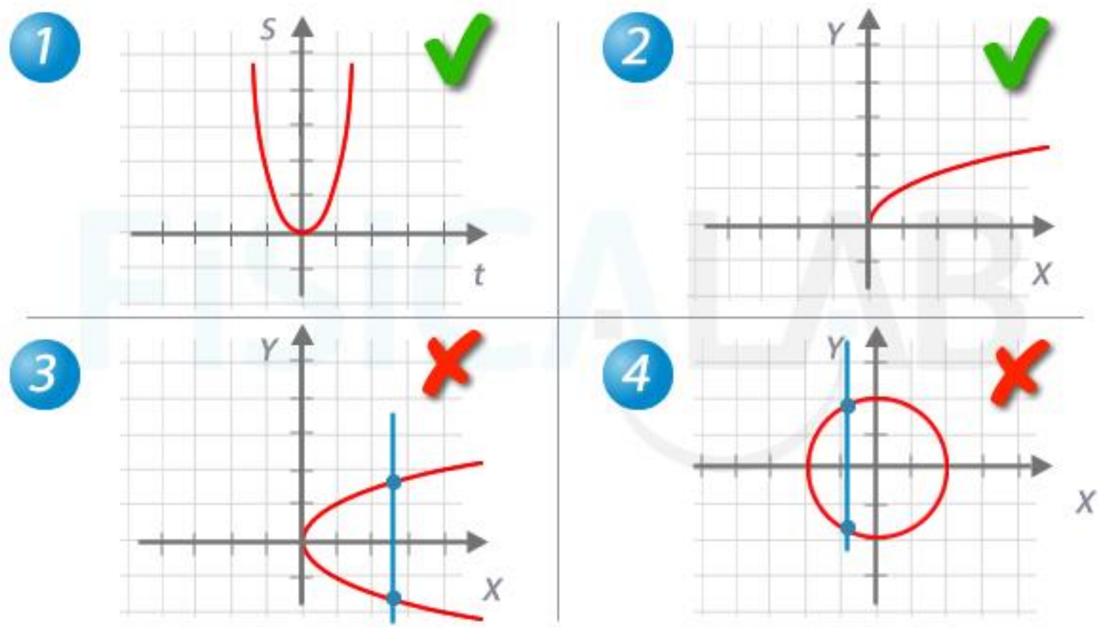


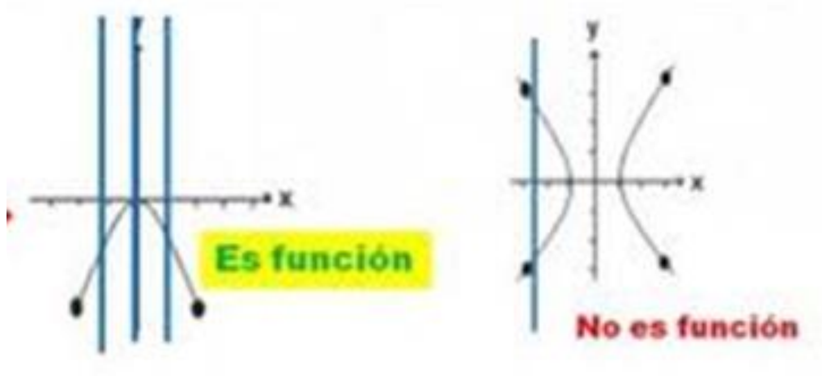


La diferencia entre el gráfico de la izquierda con el de la derecha, es que en el que dice función observamos que a cada valor de **x** le corresponde un solo valor de **y**, en cambio en el gráfico de no función observamos que a un mismo valor de **x** le corresponden varios valores de **y**.



No es función porque para cada elemento de x debe corresponderle un solo f(x) y vemos que no es así.





TODAS LAS RELACIONES Y FUNCIONES TIENEN UN DOMINIO Y UN CONTRADOMINIO O RANGO:

>Dominio: Conjunto de los elementos que definen la función, es decir, los elementos que se van a asociar con otro conjunto (los que sólo pueden asociarse una vez).

>Rango: También llamado imagen, es el conjunto de elementos que son el resultado de la asociación del dominio bajo la relación.

Conjunto dominio (D): Está formado por los elementos del conjunto de partida que están relacionados.

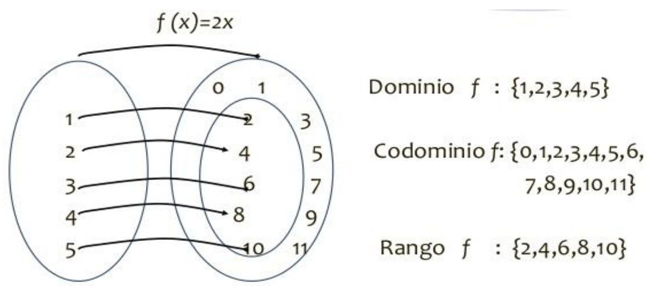
Conjunto relación $R_{A\to B=}\ \{(1,4), (2,8), (3,12)\}$

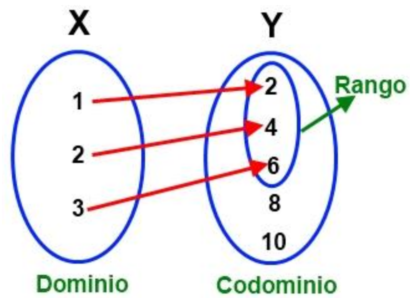
Entonces el conjunto dominio es: $D_R = \{1, 2, 3\}$

Conjunto rango o recorrido (R): Está formado por los elementos del conjunto de llegada que están relacionados. Si el conjunto relación es: $R_{A\to B=}\{(1,4),(2,8),(3,12)\}$

El conjunto rango de la relación es: $R_R=\{4,8,12\}$

Veamos otros dos ejemplos:





AHORA, VEAMOS LA RELACIÓN ENTRE DOS CONJUNTOS DADA LA FÓRMULA Y ANALICEMOS SI REPRESENTA O NO A UNA FUNCIÓN, CÓMO SERÍA SU GRÁFICA, SU DOMINIO Y SU RANGO

Ejemplos de ecuaciones, su dominio y su rango:
https://www.youtube.com/watch?v=X8JT-3lZ2ao

Dominio y rango de una función cuadrática:
https://www.youtube.com/watch?v=YlhOfpREfHE

Dominio y rango de una función cúbica:
https://www.youtube.com/watch?v=X6MaHhTRz3U

Dominio y rango de una función racional:
https://www.youtube.com/watch?v=umWSSxZNJaQ

EJm 1: La relación $f(x)=2x+1$ de R en R

Analizando las características de la ecuación dada, preguntémonos:

Es una función? Si a la variable independiente x le damos cualquier valor real, como debe multiplicarse por 2 y luego sumarle 1, podemos intuir que cada vez nos dará un resultado diferente. Además estas operaciones (multiplicación y suma) se pueden hacer con todos los números reales sin problema alguno. Por lo anterior, esta relación es una función.

Cuál es el conjunto dominio: : En una función, el conjunto dominio es el mismo conjunto de partida. En este caso, los números Reales.

Cuál es el conjunto rango: Algunos números reales.

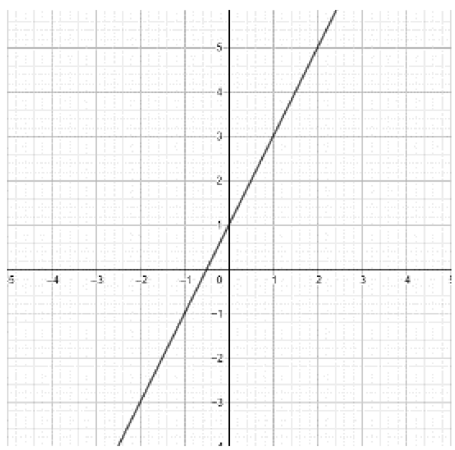
Qué tipo de gráfica la representa: Continuando con el análisis de la ecuación, se observa que el exponente de la variable independiente(x) es 1, por lo tanto la ecuación es lineal y su representación gráfica es una recta, recta que no pasa por el origen de coordenadas, sino que corta al eje y en 1.

Recordando que la pendiente de una ecuación lineal y=mx+b es m y que ella indica la inclinación con respecto al eje x, concluimos también que la recta es ascendente.

Para dibujar una recta, basta con tener dos puntos o parejas ordenadas en el plano cartesiano.

x	f(x)	(x,y)
0	2(0)+1=1	(0,1)
1	2(1)+1=3	(1,3)

La gráfica sería:



EJm 2: La relación $f(x) = 2x^2+1$

Analizando las características de la ecuación dada, preguntémonos:

Es una función? Para que la relación sea una función, debe cumplirse que a cada valor de x le corresponda un solo valor f(x). Veamos:

- Si x es cero, f(0)= 0+1=1
- Si x es positivo (x>0), f(x) es positivo porque al elevarlo al cuadrado da positivo, luego al multiplicarlo por 2 también da positivo y al sumarle 1 por supuesto que también da positivo.

- Si x es negativo, al elevarlo al cuadrado da positivo por una cantidad positiva(2) da positivo y al sumarle 1 sigue siendo positivo.
- Al comparar estas dos últimas opciones, pensamos que dos valores reales de x que sean opuestos dan el mismo resultado:

  $f(-3)= 2(-3)^2+1 =2(9)+1 =18+1=19$

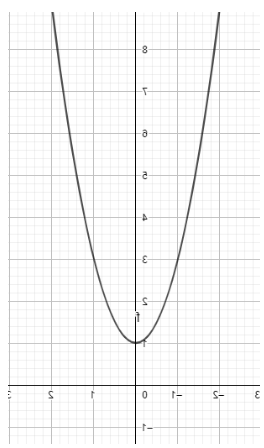
  $f(3)= 2(3)^2+1 =2(9)+1 =18+1=19$

  pero esto no es problema, porque la relación se define como función mirando el conjunto de partida o la variable independiente de una ecuación, y aquí no hay problema con que x tome cualquier valor real.

Cuál es el conjunto dominio: x puede tomar cualquier valor real, así el conjunto dominio son todos los reales.

Qué tipo de gráfica la representa: Como la variable independiente tiene como exponente 2, sabemos que no es una recta. Qué gráfica será? Es una curva y se llama parábola.

x	f(x)	(x,y)
0	2(0)^2+1=2(0)+1=0+1=1	(0,1)
1	2(1)^2+1=2(1)+1=2+1=3	(1,3)
2	2(2)^2+1=2(4)+1=8+1=9	(2,9)
-1	2(-1)^2+1=2(1)+1=2+1=3	(-1,3)
-2	2(-2)^2+1=2(4)+1=8+1=9	(-2,9)



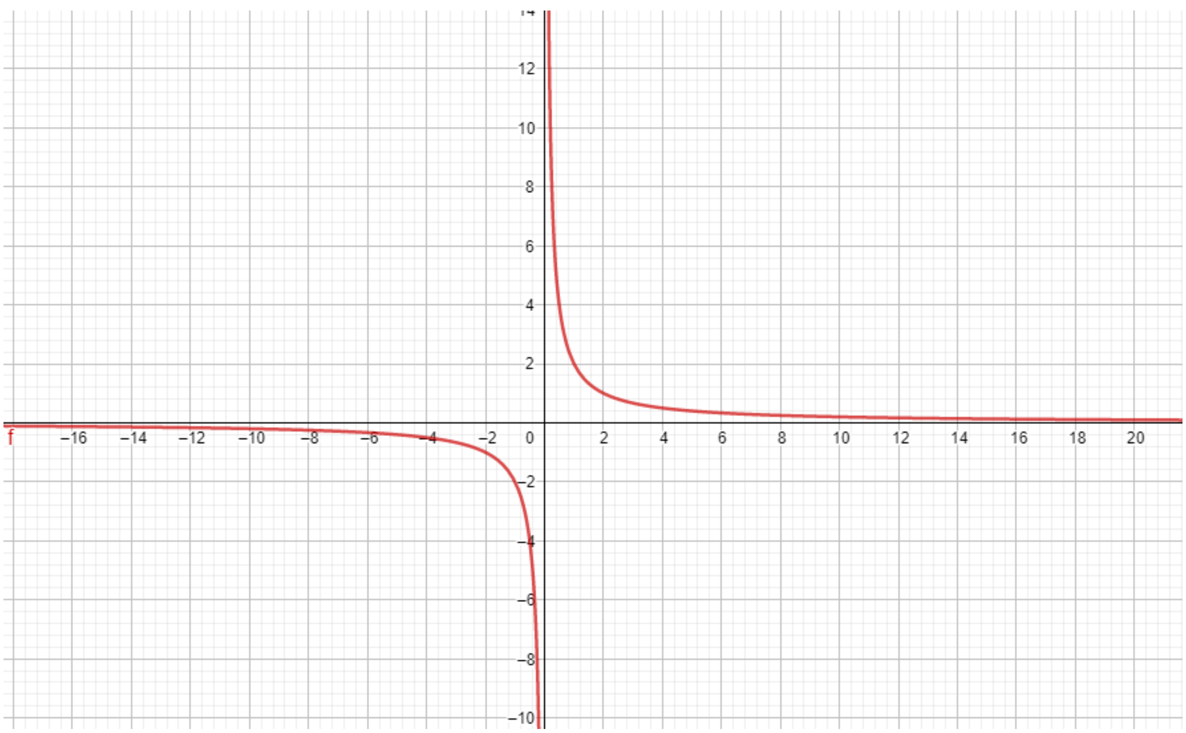
Un dato más, si el coeficiente del término de segundo grado es positivo, la parábola abre hacia arriba, de lo contrario, la parábola abre hacia abajo.

EJm 2: La relación $f(x)=\frac{2}{x}$ será una función? está definida para todo número real ?, es decir, el conjunto dominio son todos los números reales?

Rta: El conjunto dominio puede ser cualquier número Real, excepto el cero, porque no podríamos realizar la división. Por lo tanto el conjunto dominio es igual a $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

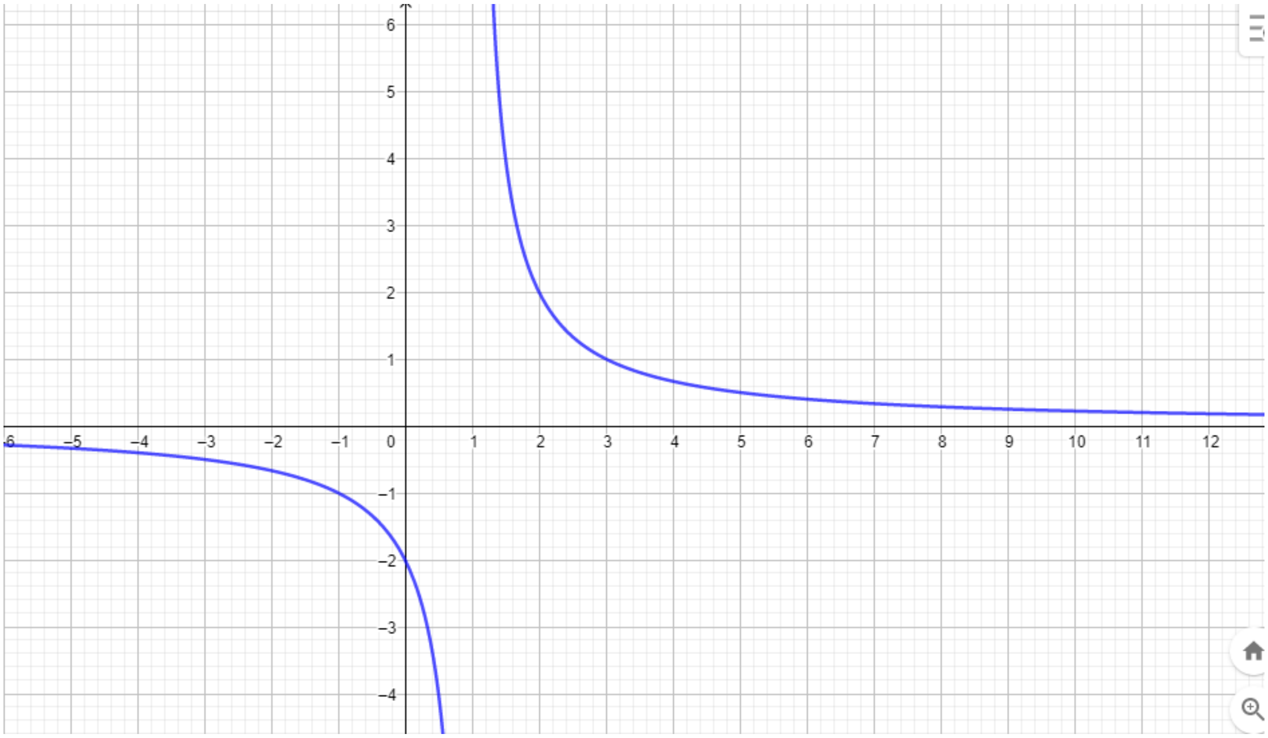
Si x no puede valer cero, entonces la gráfica no puede pasar por x=0 y menos por (0,0)

x	f(x)	(x,y)
1	2/1 = 2	(1,2)
2	2/2= 1	(2,1)
-1	2/-1= -2	(-1,-2)
-2	2/-2 = -1	(-2,-1)
3	0,666666667	(3,0.66)
-3	2/-3	(-3,-2/3)
4	2/4=0.5	(4,0.5)



Ejm 3: : La función $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ está definida para todo número real ?, es decir, el conjunto dominio son todos los números reales?

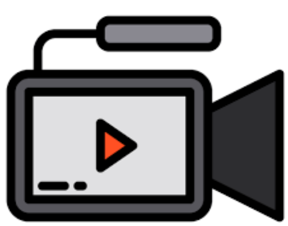
Rta: La variable x puede tomar cualquier valor Real, menos el 1 porque 1-1=0 y la división no podría realizarse. Por lo tanto $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$



Hagamos un resumen sobre las gráficas de las diferentes funciones y sus características. Comparémoslas:

https://www.youtube.com/watch?v=f2nCdfPdqlE

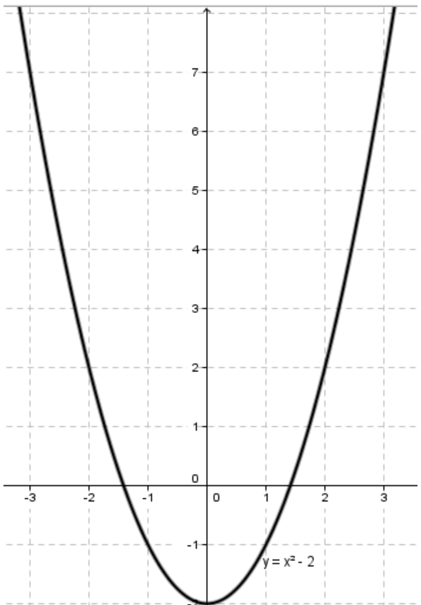
CÓMO IDENTIFICAR GRÁFICAMENTE EL CONJUNTO DOMINIO Y EL CONJUNTO RANGO



https://www.youtube.com/watch?v=2CYya8dJovg

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions/x2f8bb11595b61c86:introduction-to-the-domain-and-range-of-a-function/v/domain-and-range-from-graphs

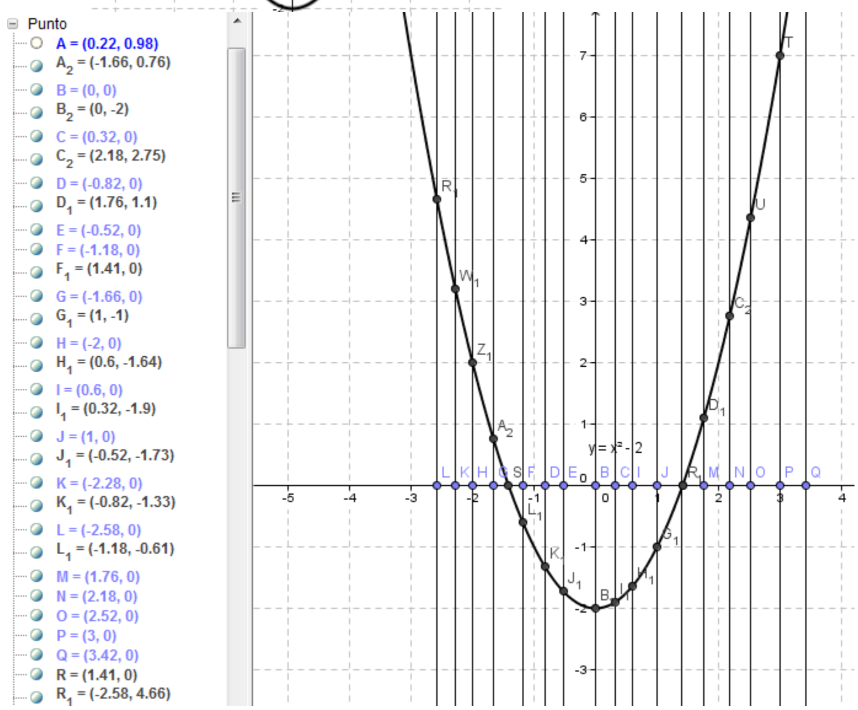
Dada la función $f(x) = x^2 - 2$



Conjunto de partida: Reales (eje X)

Conjunto de llegada: Reales (eje Y)

Conjunto Dominio: Lo busco en el eje X. Trazamos perpendiculares al eje X y observamos si dichas rectas perpendiculares cortan la gráfica. Si sí, entonces a ese valor de X le corresponde un valor de Y, formándose la pareja ordenada (x,y)



A todos los valore de X les corresponde un valor de Y, porque:

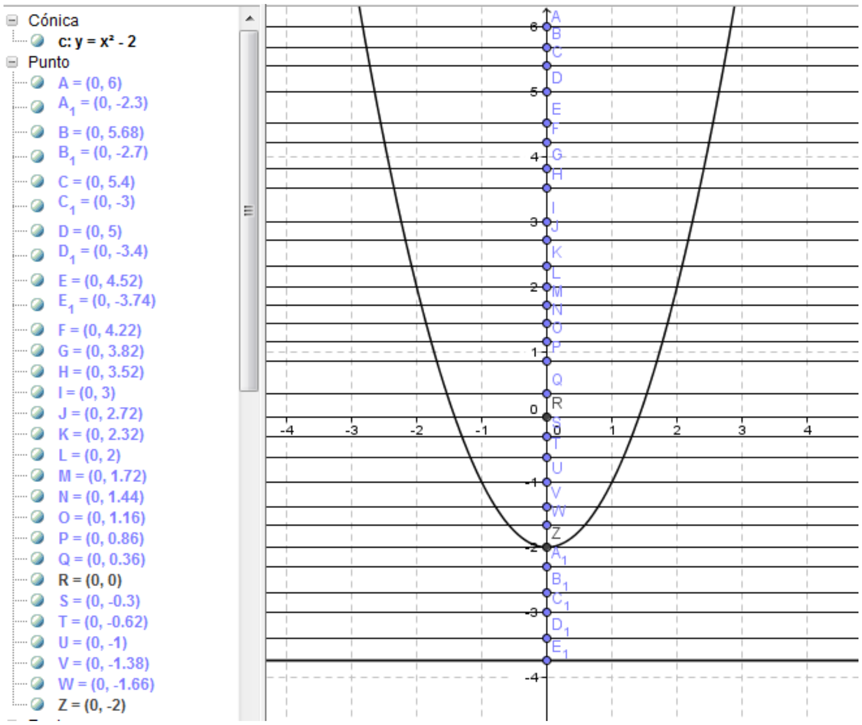
A cero le corresponde la ordenada -2.

Sirven todos los reales positivos: Es fácil detectar que todos los reales hasta llegar al 3 les corresponde un valor de Y. Como la gráfica se va extendiendo hacia la derecha, al trazar perpendiculares al eje X que pasen por 3 o más, en algún momento cortarán la gráfica.

Sirven todos los reales negativos: La gráfica también se extiende hacia la izquierda y al trazar perpendiculares al eje X siempre estas perpendiculares cortarán la gráfica.

Así puedo concluir que el conjunto Dominio es todo el conjunto de los Reales.

También observo que a cada número Real del eje X le corresponde un solo valor de Y. Por lo tanto, la relación es una función.



El conjunto Rango lo obtengo del eje Y. Trazo perpendiculares al eje Y y observo si se corta o no a la gráfica.

Veamos que CERO sirve como imagen o rango y todos los reales positivos. Pero ojo con los negativos, porque solo hasta y=-2 las perpendiculares cortan la gráfica. Por lo tanto el conjunto rango está formado por el cero, todos los reales positivos y los negativos pero solo hasta -2.

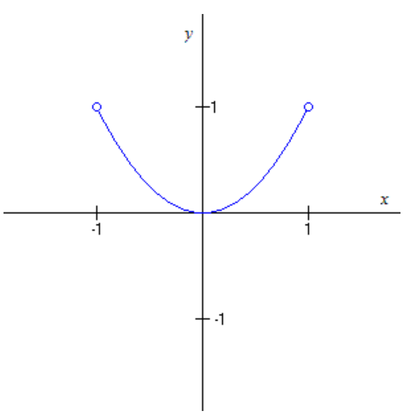
En notación de intervalo se escribe [-2,∞+)

La notación siguiente muestra que el dominio de la función está restringido al intervalo (–1, 1).

$f(x) = x^2, \quad -1 < x < 1$

La gráfica de esta función es como se muestra. Dese cuenta de los círculos abiertos, que muestran que la función no está definida en $x = -1$ y $x = 1$. Los valores del rango de y desde 0 hasta el 1 (incluyendo el 0, pero no incluyendo el 1). Así el rango de la función es

$0 \leq y < 1$.



Las funciones son correspondencias entre dos conjuntos, llamados **dominio** y el **rango**. Cuando defines una función, normalmente dices qué tipo de números pueden tener el dominio (*x*) y el rango (*f(x)*). Pero incluso si dices que son números reales, eso no significa que se pueden tomar *todos* los números reales para *x*. Tampoco significa que todos los números reales pueden ser valores de la función, *f*(*x*). Puede haber restricciones en el dominio y en el rango. Las restricciones dependen parcialmente del *tipo* de la función.

En este tema, todas las funciones estarán restringidas a valores de números reales. Esto es, sólo los números reales pueden ser usados en el dominio y sólo los números reales pueden estar en el rango.

Restringiendo el dominio

Hay dos razones principales por los que los dominios pueden estar restringidos.

- No se puede dividir entre 0.
- No puedes sacar la raíz cuadrada (o par) de un número negativo, porque el resultado no sería un número real.

¿En qué tipo de funciones sucederían estos problemas?

La división entre 0 podría ocurrir cuando la función tiene una variable en el *denominador* de una expresión racional. Esto es, hay que poner atención en las *funciones racionales*. Veamos algunos ejemplos y observa que la "división entre 0" no necesariamente significa que *x* es 0!

Función	**Notas**
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	Si $x = 0$, estarías dividiendo entre 0, entonces $x \neq 0$.
$f(x)=\dfrac{2+x}{x-3}$	Si $x = 3$, estarías dividiendo entre 0, entonces $x \neq 3$.
$f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x-1}$	Si bien puedes simplificar esta función como $f(x) = 2$, cuando $x = 1$ la función original incluiría la división entre 0. Entonces $x \neq 1$.

$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$	$x = 1$ y $x = -1$ harían 0 el denominador. De nuevo, esta función puede simplificarse como $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, pero cuando $x = 1$ o $x = -1$ la función *original* incluiría la división entre 0, entonces $x \neq 1$ y $x \neq -1$.
$f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x^2+1}$	Este es un ejemplo cuando no hay restricciones en el dominio, aunque haya una variable en el denominador. Porque $x^2 \geq 0$, $x^2 + 1$ nunca será 0. Lo menos que puede ser es 1, por lo que no hay peligro de una división entre 0.

Las raíces cuadradas de números negativos pueden ocurrir cuando la función tiene una variable dentro de un radical con una raíz par. Veamos estos ejemplos y observa que "la raíz cuadrada de un número negativo" ¡no necesariamente significa que el valor dentro del radical es negativo! Por ejemplo, si $x = -4$, entonces $-x = -(-4) = 4$, un número positivo.

Función	**Restricciones al Dominio**
$f(x) = \sqrt{x}$	Si $x < 0$, estarías sacando la raíz cuadrada de un número negativo, entonces $x \geq 0$.
$f(x) = \sqrt{x+10}$	Si $x < -10$, estarías sacando la raíz cuadrada de un número negativo, entonces $x \geq -10$.
$f(x) = \sqrt{-x}$	¿Cuándo es negativa $-x$? Sólo cuando x es positiva. (Por ejemplo, si $x = -3$, entonces $-x = 3$. Si $x = 1$, entonces $-x = -1$.) Esto significa que $x \leq 0$.
$f(x) = \sqrt{x^2-1}$	$x^2 - 1$ debe ser positivo, $x^2 - 1 > 0$. Entonces $x^2 > 1$. Esto sólo sucede cuando x es mayor que 1 o menor que −1: $x \leq -1$ o $x \geq 1$.
$f(x) = \sqrt{x^2+10}$	No hay restricciones en el dominio, aunque hay una variable dentro del radical. Pero $x^2 \geq 0$, $x^2 + 10$ nunca será negativo. Lo menor que puede ser es 10, por lo que no hay peligro de sacar la raíz cuadrada de un número negativo.

Los dominios pueden restringirse si:

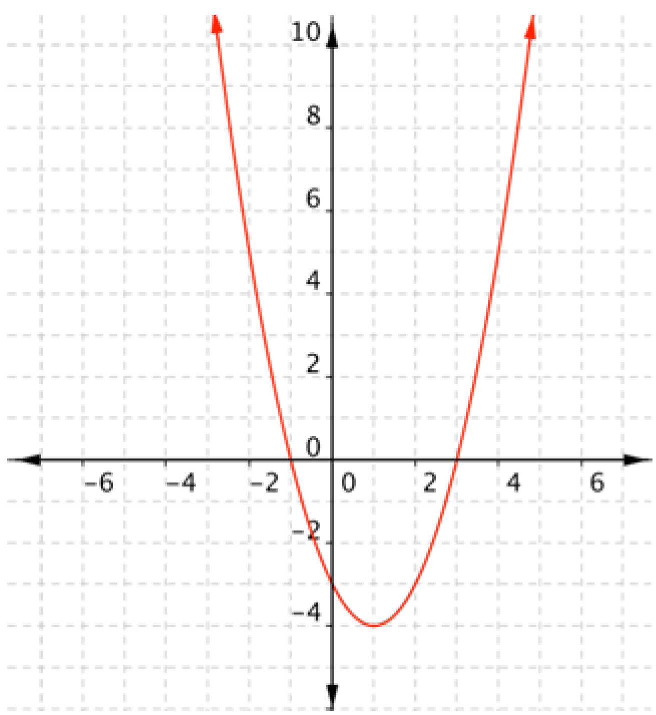
· la función es una función racional y el denominador es 0 para algún valor de *x*.

· la función es una función radical con un índice par (como una raíz cuadrada) y el radicando puede ser negativo para algún valor de *x*.

Rango

Recuerda, aquí el rango está restringido para todos los números reales. El rango también está determinado por la función y el dominio. Considera estas gráficas y piensa qué valores de y son posibles. y qué valores (si los hay) no lo son. En cada caso, las funciones se evalúan con números reales — esto es, *x* y *f*(*x*) sólo pueden ser números reales.

Función cuadrática, $f(x) = x^2 - 2x - 3$



Recuerda que la función cuadrática básica: $f(x) = x^2$ siempre debe ser positiva, entonces $f(x) \geq 0$ en este caso. En general, las funciones cuadráticas siempre tienen un punto con un máximo (si se abre hacia abajo) o un mínimo (si se abre hacia arriba, como la mostrada). Esto significa que el rango de una función cuadrática siempre estará restringido para empezar sobre el valor mínimo o debajo del valor máximo. Para la función anterior, el rango es $f(x) \geq -4$.

Otras funciones polinomiales con grados pares tendrán restricciones de rango similares. Las funciones polinomiales con grados impares, como $f(x) = x^3$, no tendrán restricciones.

Función radical, $f(x) = -\sqrt{x} - 2$