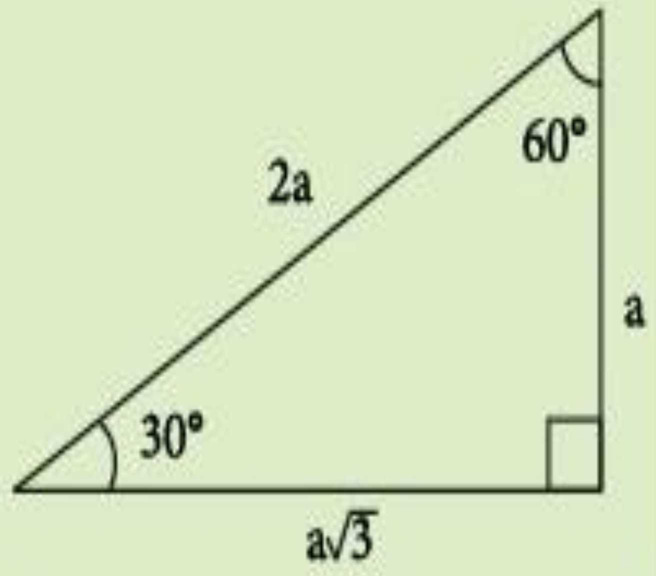
DERECHO BASICO DE APRENDIZAJE: Reconoce el significado de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo para ángulos agudos, en particular, Seno, Coseno y Tangente.

Razones trigonométricas para ángulos notables

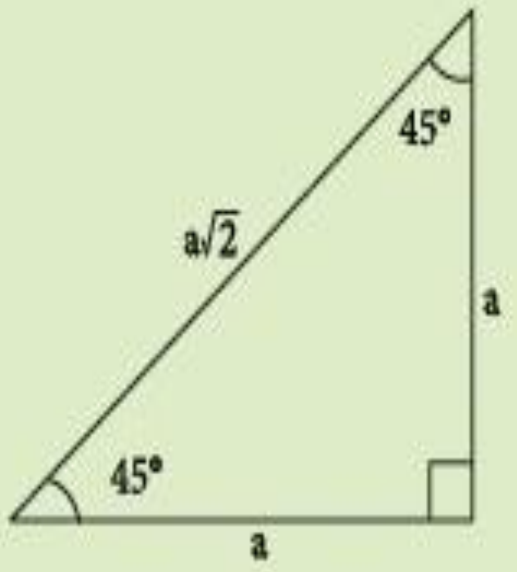
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

Son aquellos triángulos rectángulos, donde conociendo las medidas de sus ángulos agudos, se puede saber la proporción existente entre sus lados. Destacan los siguientes triángulos:

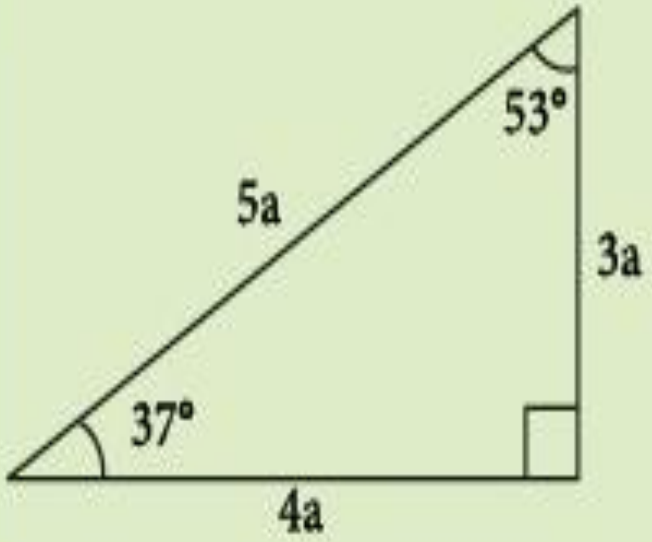
a) De 30° y 60°



b) De 45° y 45°



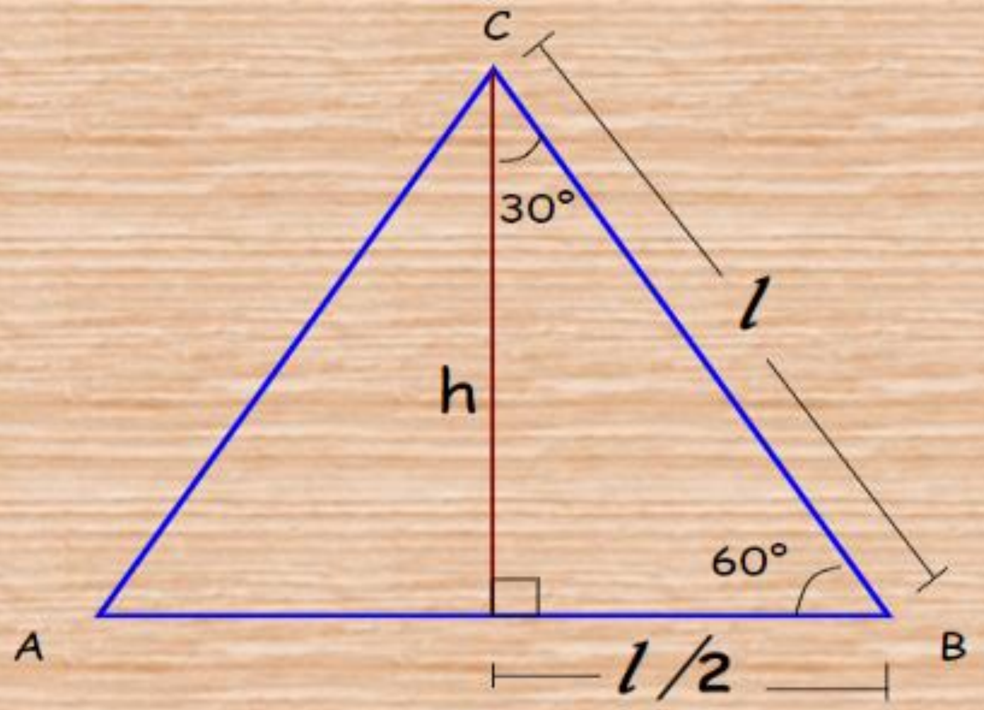
c) De 37° y 53°



Razones trigonométricas de ángulos notables

ANGULOS DE 30° Y 60°

Para determinar las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°, se utiliza una construcción auxiliar de un triangulo equilátero.



Razones trigonométricas de ángulos notables

Como el $\triangle ABC$ es equilátero, se observa que $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = 60°$; $\overline{CD}$ es la altura sobre $\overline{AB}$, mediatriz de $\overline{AB}$ y bisectriz de $\measuredangle C$.

Por lo anterior CDB = 90° , DCB = 30° y

$DB = \frac{1}{2}l$ además:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \qquad \text{Por Pitágoras}$$

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

Despejando h y simplificando

Razones trigonométricas de ángulos notables

- Ahora podemos calcular las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60° del triangulo.

$$sen\,30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30^\circ = 2$$

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

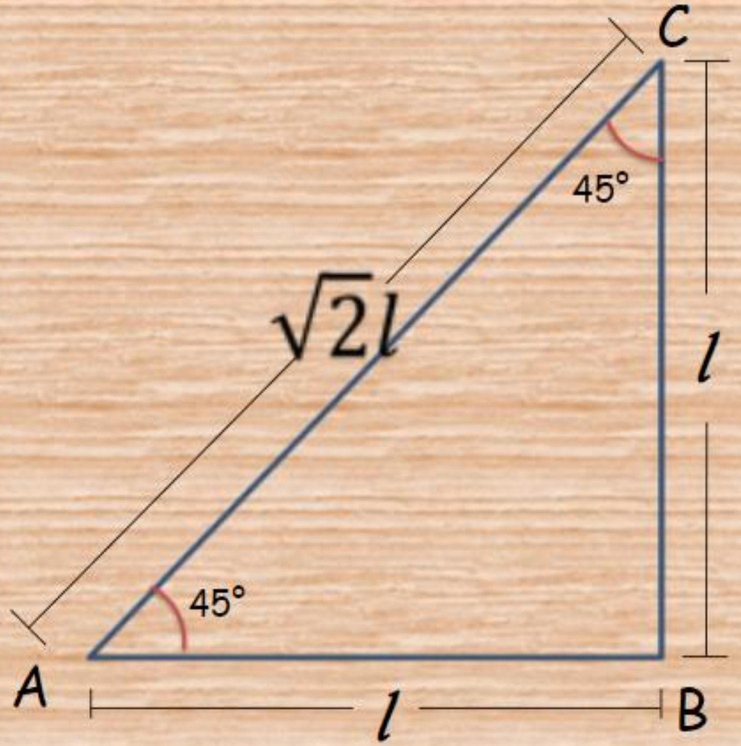
$$\sec 60° = 2$$

$$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Razones trigonométricas de ángulos notables

ANGULOS DE 45°

Para determinar las razones trigonométricas del ángulo de 45°, se utiliza un triangulo rectángulo isósceles.



Como el $\triangle$ ABC es rectángulo se verifican , entre otras, las siguientes propiedades:

$\measuredangle B = 90°$, $\measuredangle A = \measuredangle C = 45°$, $AB = BC = l$

Además:

$$h^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$$

Por Pitágoras

$$h = \sqrt{2}l$$

Razones trigonométricas de ángulos notables

- Ahora podemos calcular las razones trigonométricas del ángulo de 45°.

$$sen\ 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45^\circ = 1 \qquad \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cot 45^\circ = 1 \qquad \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

Razones trigonométricas de ángulos notables

ÁNGULOS de 0° y 90°

Recordemos que según los visto en el tema de funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales:

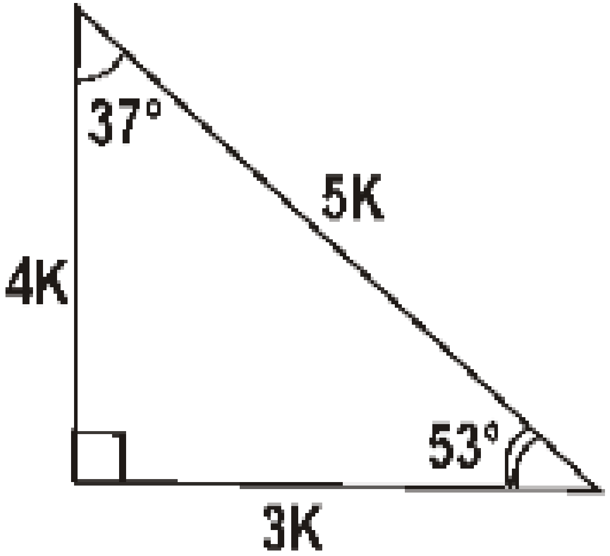
$$sen\ 0^\circ = 0 \qquad \tan 0^\circ = 0 \qquad \sec 0^\circ = 1$$

$$\cos 0^\circ = 1 \qquad \cot 0^\circ = Ind \qquad \csc 0^\circ = Ind$$

$$sen\ 90^\circ = 1 \qquad \tan 90^\circ = Ind \qquad \sec 90^\circ = Ind$$

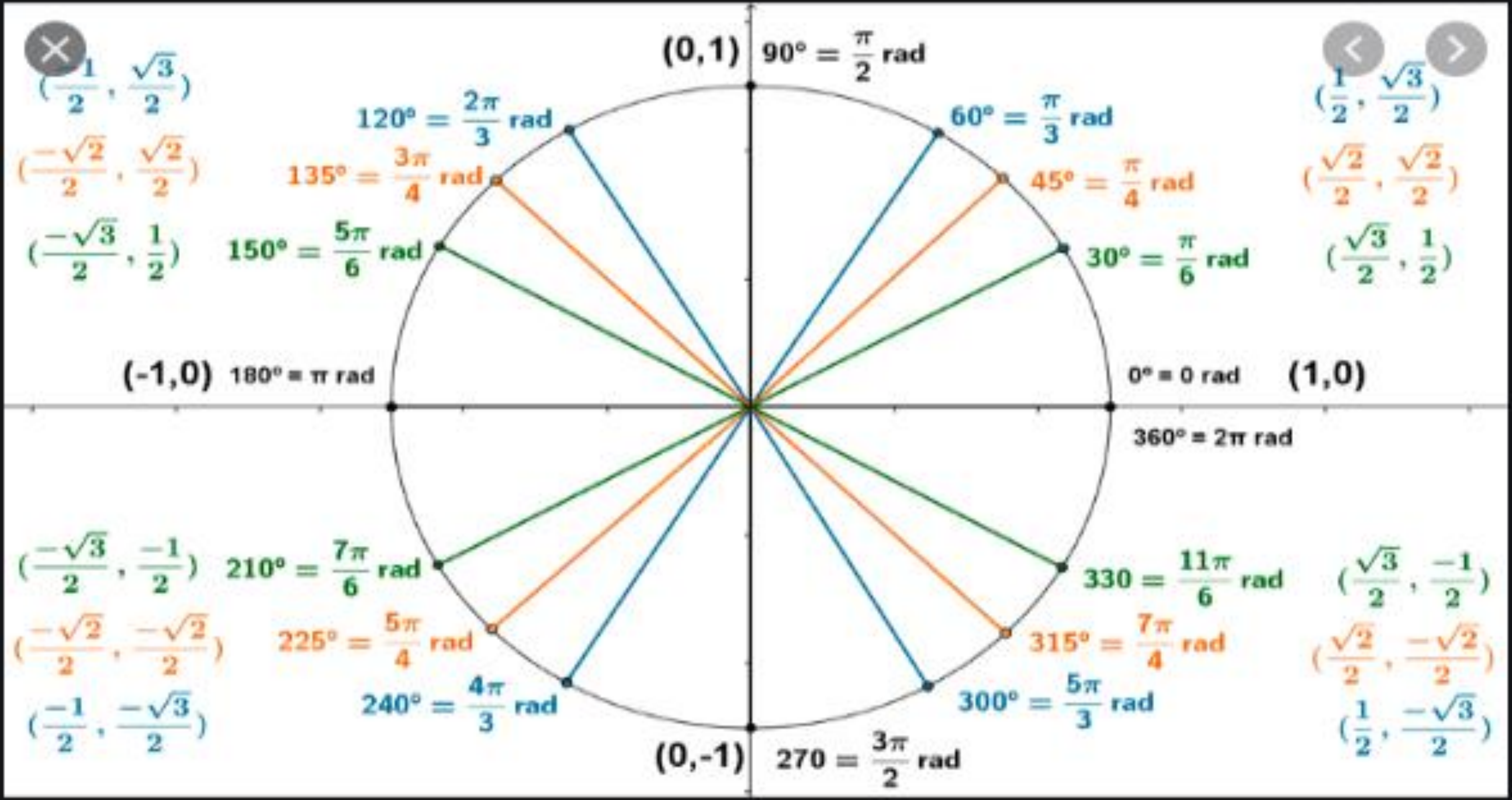
$$\cos 90^\circ = 0 \qquad \cot 90^\circ = 0 \qquad \csc 90^\circ = 1$$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO APROXIMADO DE 37° Y 53°



	Sen	Cos	Tg	Ctg	Sec	Csc
37°	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$
53°	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$

CIRCULO TRIGONOMÉTRICO DE ÁNGUOS NOTABLES



En la siguiente tabla se muestran los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables y sus múltiplos.

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
θ	0	∏/6	∏/4	∏/3	∏/2	2∏/3	3∏/4	5∏/6	∏	7∏/6	5∏/4	4∏/3	3∏/2	5∏/3	7∏/4	11∏/6	0
sen θ	0	½	√2/2	√3/2	1	√3/2	√2/2	½	0	-1/2	-√2/2	-√3/3	-1	-√3/2	-√2/2	-1/2	0
cos θ	1	√3/2	√2/2	½	0	-1/2	-√2/2	-√3/2	-1	-√3/2	-√2/2	-1/2	0	½	√2/2	√3/2	1
tan θ	0	√3/3	1	√3	Ind	-√3	-1	-√3/3	0	√3/3	1	√3	Ind	-√3	-1	√3/3	0
csc θ	Ind	2	√2	2√3/3	1	2√3/2	√2	2	Ind	-2	-√2	2√3/3	-1	-2√3/3	-√2	-2	Ind
sec θ	1	2√3/3	√2	2	Ind	-2	-√2	-2√3/3	-1	-2√3/3	-√2	-2	Ind	2	√2	2√3/3	1
cot θ	ind	√3	1	√3/3	0	-√3/3	-1	-√3	ind	√3	1	√3/3	0	-√3/3	-1	-√3	ind

EJERCICIO 1 :

Calcule: $A=2\text{Sen}37°\text{Cos}37°$

RESOLUCIÓN :

$$A=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}\Rightarrow A=\frac{24}{25}$$

EJERCICIO 2 :

Calcule : $B=8^{tg53°}$

RESOLUCIÓN :

$$B=(2)^{3\times\frac{4}{3}}\Rightarrow B=16$$

EJERCICIO 3 :

Calcule: $C=\sqrt{3\cos53°\cos37°}$

RESOLUCIÓN :

$$C=\sqrt{3\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{36}{25}}\Rightarrow C=\frac{6}{5}$$

EJERCICIO 4:

Determinar:

$$A=\frac{tg^2 45°+sec^2 60°}{5-3tg60°.cot60°}$$

Solución:

$$A=\frac{tg^2 45°+sec^2 60°}{5-3tg60°.cot60°}$$

$$A=\frac{1^2+2^2}{5-3(\sqrt{3}).\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$A=\frac{1+4}{5-3}=\frac{5}{2}$$

A=2,5

EJERCICIO 5:

Ejemplo: Determinar el valor de la siguiente expresión:

$$a)\ \ sen\ 30° + sen\ 60°$$

Solución: como $sen\ 30° = \frac{1}{2}$ y $sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ entonces.

$$sen\ 30° + sen\ 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

EJERCICIO 6:

Determinar:

$$A = \frac{tg^2 45° + sec^2 60°}{5 - 3tg60°.cot60°}$$

Solución:

$$A = \frac{tg^2 45° + sec^2 60°}{5 - 3tg60°.cot60°}$$

$$A = \frac{1^2 + 2^2}{5 - 3(\sqrt{3}).\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$A = \frac{1+4}{5-3} = \frac{5}{2}$$

A=2,5

EJERCICIO 7:

Calcular: $E = Sen^2 30° + Tg37°$

Solución:

Reemplazando valores:

$$E = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow E = 1$$

Evaluar: $E = \dfrac{sen^2 45° + cos60°}{csc30°}$

Solución:

Reemplazando:

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow \frac{\frac{2}{4} + \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \quad \therefore E = \frac{1}{2}$$

VEAMOS OTROS EJEMPLOS

01 Calcular: $A = \text{sen}^2 30° + \tan 37°$

RESOLUCIÓN :

Reemplazando valores en la expresión:

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow Q = \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1$$

02 Evaluar: $B = \dfrac{\text{sen}^2 45° + \cos 60°}{\csc 30°}$

RESOLUCIÓN :

Reemplazando valores en la expresión:

$$B = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

03 Hallar: $C = (\sec 53° + \tan 53°)\cos 60°$

RESOLUCIÓN :

Reemplazando valores:

$$C = \left(\frac{5}{3} + \frac{4}{3}\right) \times \frac{1}{2} \Rightarrow L = \left(\frac{9}{3}\right)\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

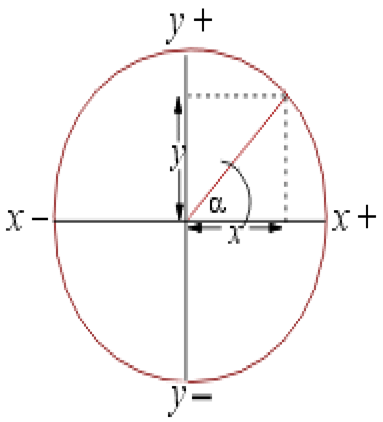
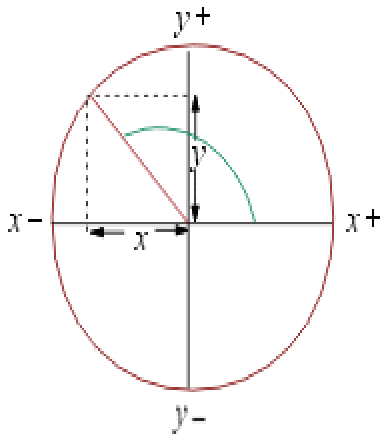
04 Hallar: $D = (\tan^2 60° + 5\,\text{sen} 37°)\,\text{sen} 30°$

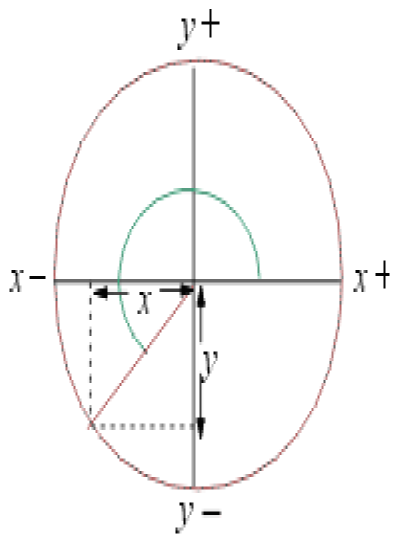
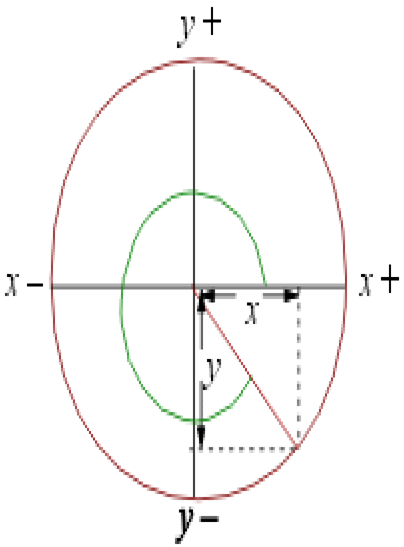
RESOLUCIÓN :

Reemplazando valores:

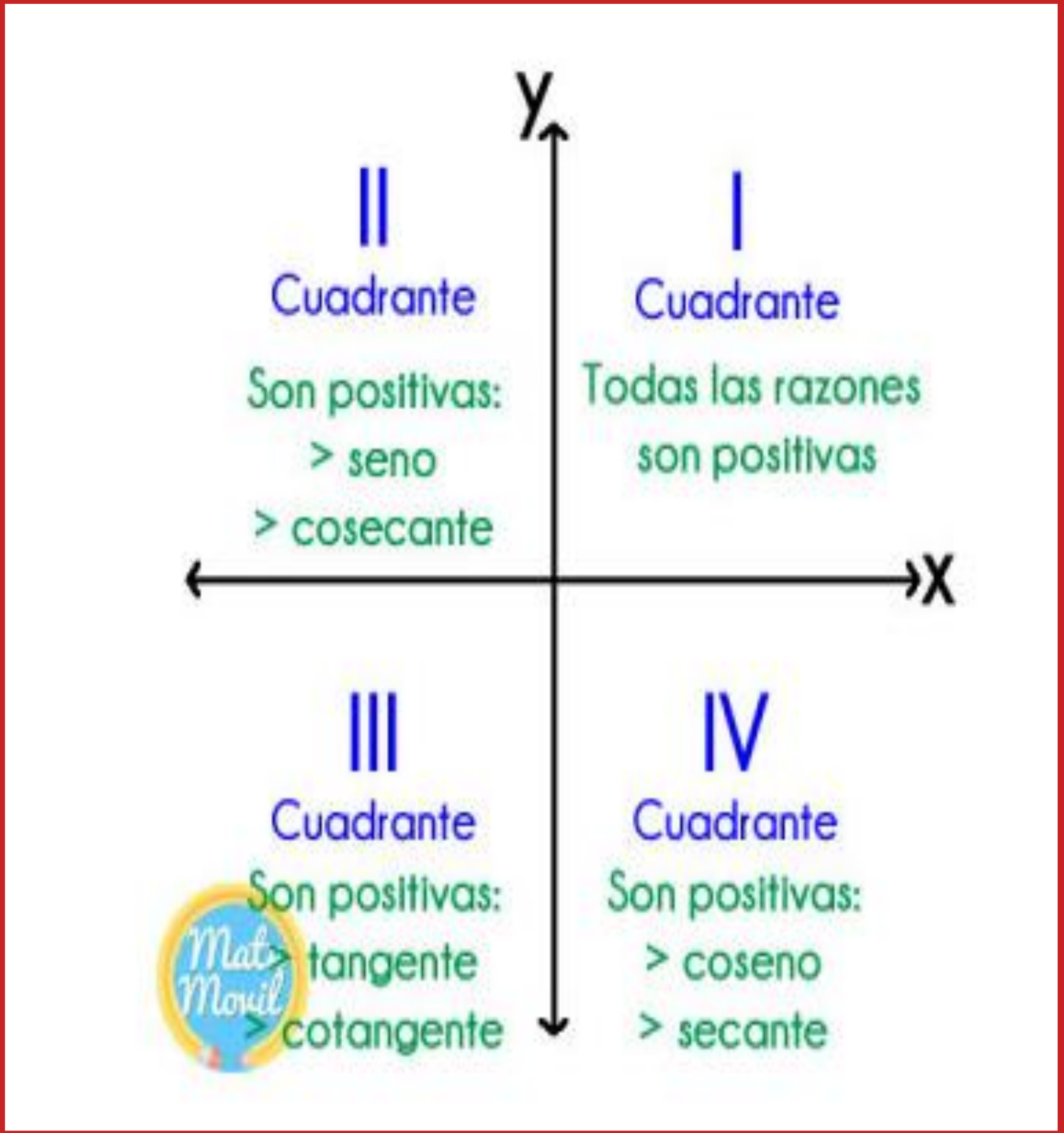
$$D = \left(\left(\sqrt{3}\right)^2 + 5\left(\frac{3}{5}\right)\right) \times \frac{1}{2} \Rightarrow T = (3+3)\frac{1}{2} \Rightarrow T = 3$$

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMERICAS EN LOS CUATRO CUADRANTES

Cuadrante	Explicación	Signos de las Funciones
	En el *primer cuadrante*, vemos que: el cateto adyacente se ubica sobre el eje *x*, así que lo denominaremos "*x*"; al cateto opuesto, que se ubica sobre el eje *y*, lo llamaremos "*y*". La hipotenusa, que es el radio de la circunferencia, la designaremos "r". Ya que "*x*", "*y*", "r", son positivas, entonces, Todas las funciones trigonométricas en el primer cuadrante son positivas.	SEN : + COS: + TAN: + CSN: + SEC: + COT: +
	En el *segundo cuadrante*, el cateto adyacente cae sobre el eje negativo de las *x*, mientras que el cateto opuesto sigue sobre el ele positivo de las *y* . El radio (la hipotenusa) sigue siendo positiva en todos los cuadrantes. Por lo tanto: el Coseno, la Tangente y sus inversas (Secante y Cotangente) tienen resultados negativos.	SEN : + COS : – TAN: – CSN: + SEC: – COT: –

	En el *tercer cuadrante*, tanto el cateto adyacente como el cateto opuesto tienen sus signos negativos, ya que caen sobre la parte negativa de los ejes. En este caso la Tangente (y su inversa, la Cotangente) resultan positivas (− : − = +)	SEN : - COS : - TAN: + CSN: - SEC: - COT: +
	En el cuarto cuadrante, el cateto adyacente vuelve a estar sobre el eje positivo de las *x*, mientras que el cateto opuesto sigue sobre el eje negativo de las *y*. En este caso, las únicas funciones cuyo resultado será positivo son el Coseno y la Secante.	SEN : - COS :+ TAN: - CSN: - SEC: + COT: -

Esto es; los signos en cada cuadrante son:



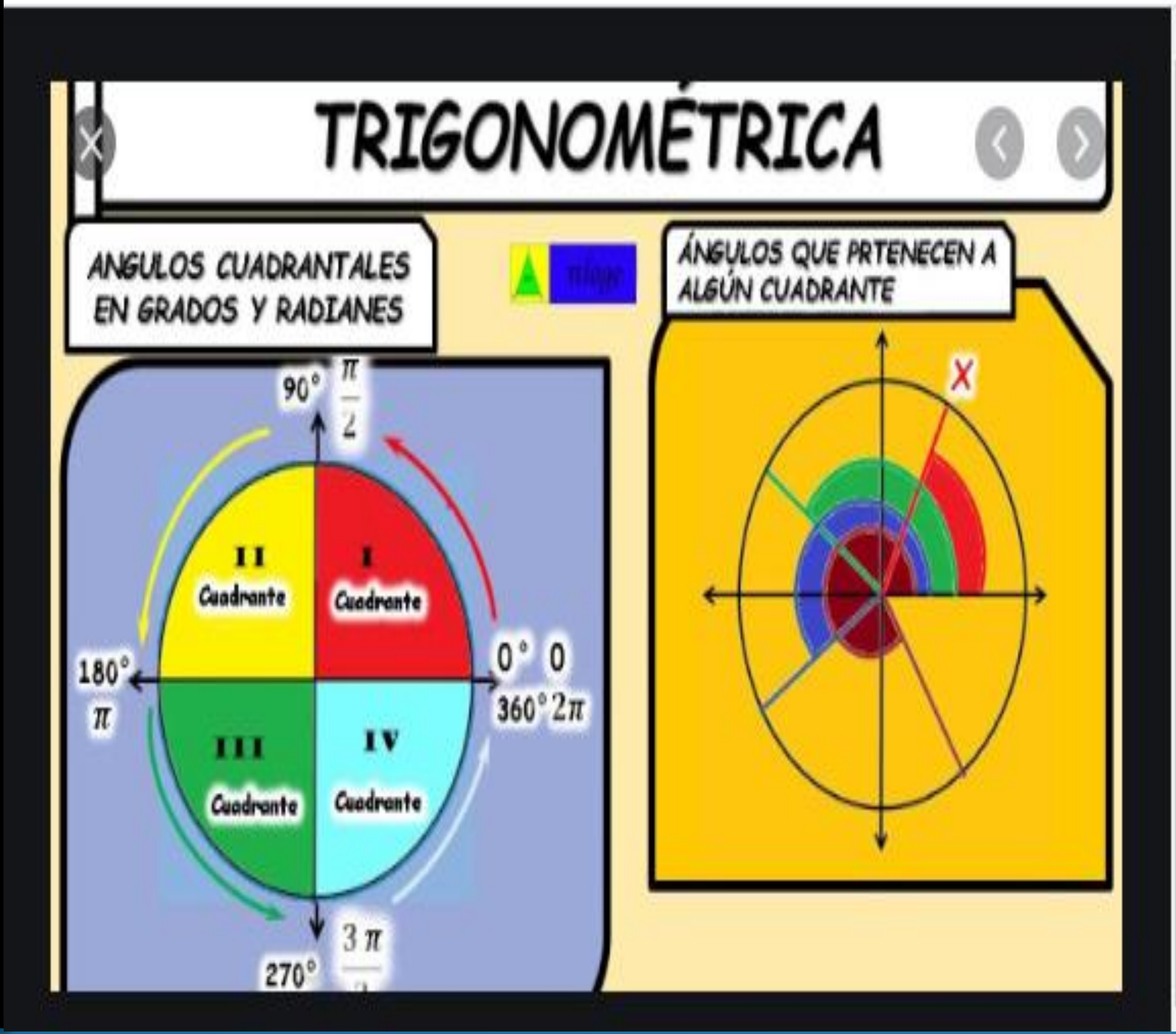
FUNCIÓN	I C	II C	III C	IV C
seno	+	+	-	-
coseno	+	-	-	+
tangente	+	-	+	-
cotangente	+	-	+	-
secante	+	-	-	+
cosecante	+	+	-	-

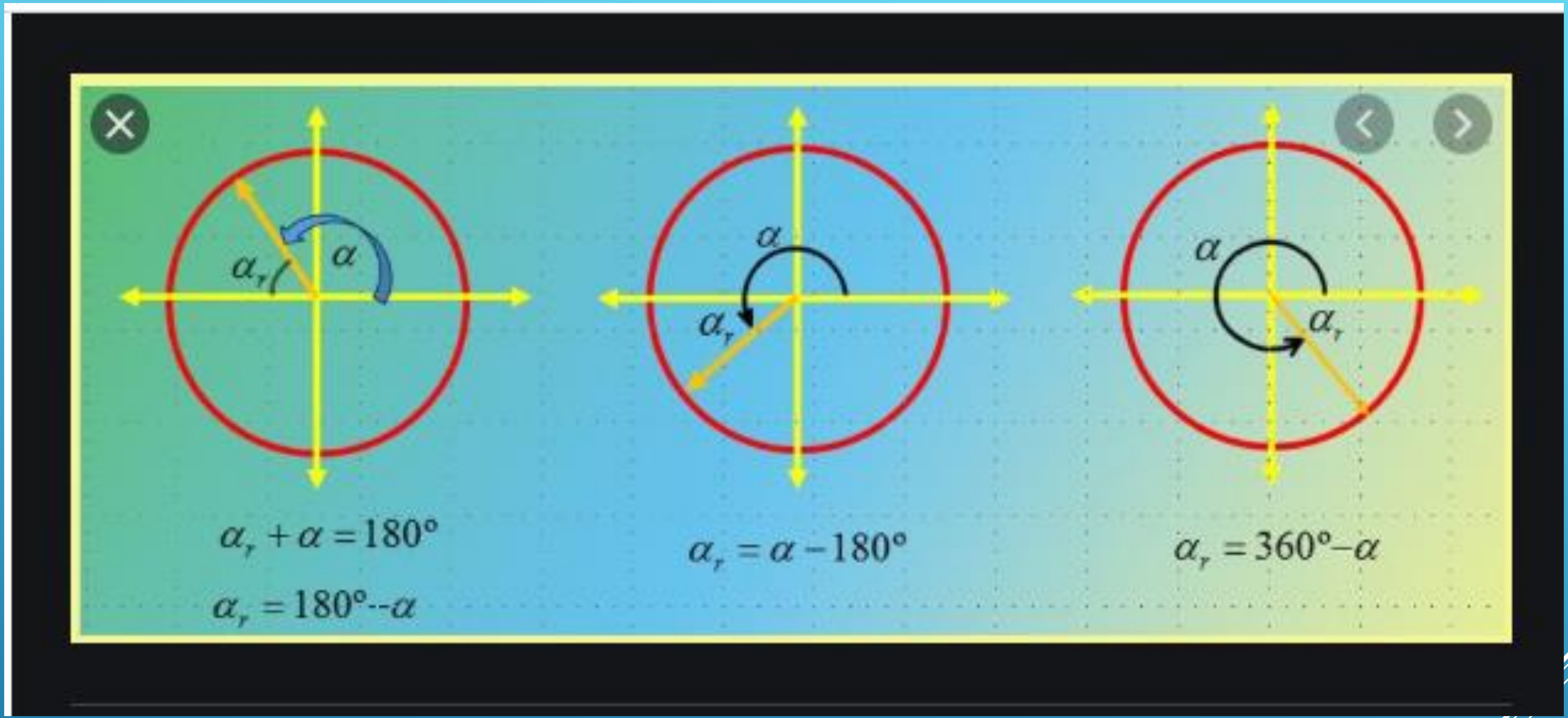
soloformulas.com

Reducción al Primer Cuadrante

La reducción al primer cuadrante significa expresar una razón trigonométrica de cualquier ángulo de medida mayor que 90º, como una razón de un ángulo entre 0º y 90º, considerando el signo que le corresponde a la razón del ángulo primitivo.

Esto permite calcular razones trigonométricas de ángulos de cualquier cuadrante.



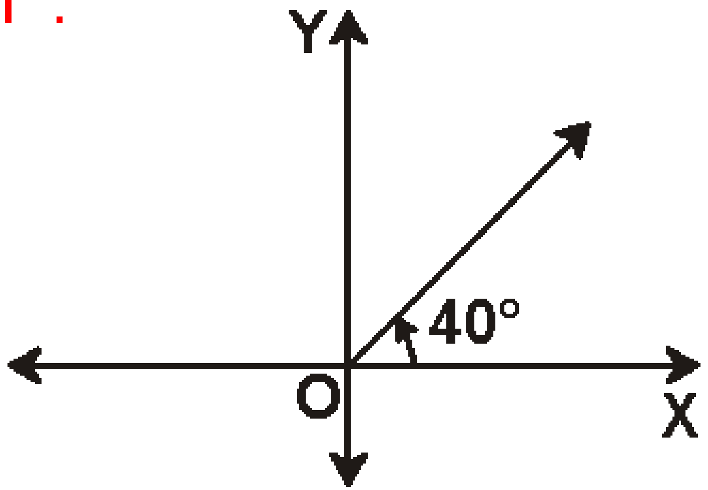


Reducir del segundo cuadrante al primero

Reducir del tercer cuadrante al primero

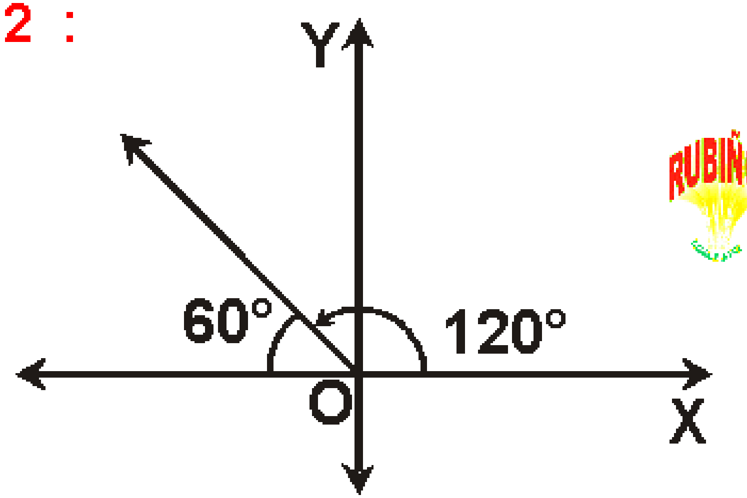
Reducir del cuarto cuadrante al primero

EJEMPLO 1 :



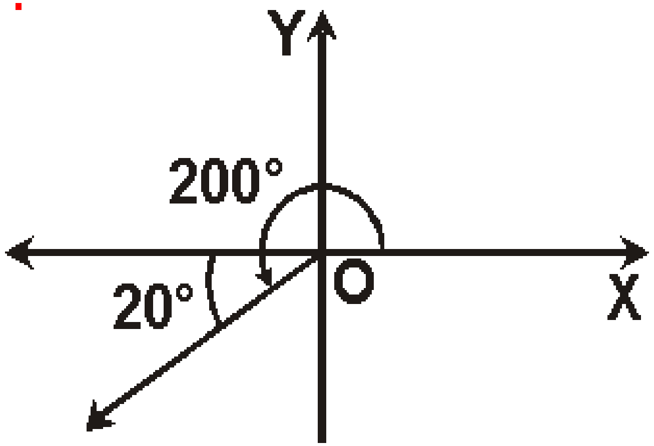
El ángulo de referencia de **40° es 40°**

EJEMPLO 2 :



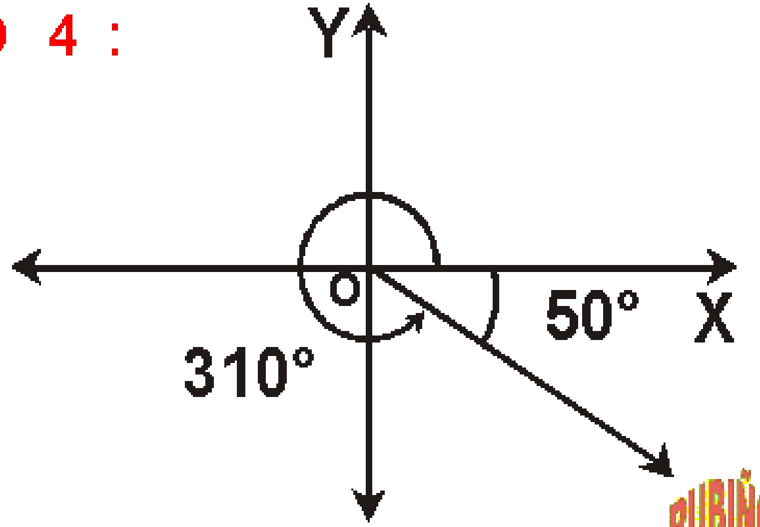
El ángulo de **120° es 60°**

EJEMPLO 3 :



El ángulo de referencia de **200° es 20°**

EJEMPLO 4 :



El ángulo de referencia de **310° es 50°**

OTROS EJEMPLOS:

EJEMPLO 1:

Dado el ángulo 127º reducirlo al primer cuadrante.

SOLUCIÓN:

El ángulo 127º se encuentra en el segundo cuadrante.
Su suplementario es 180º - 127º = 53º, tenemos entonces

sen 127º = sen 53º;
cos 127º = - cos 53º;
tg 127º = - tg 53º

EJEMPLO 2:

Dado el ángulo 215º reducirlo al primer cuadrante

SOLUCIÓN:

El ángulo 215º se encuentra en el tercer cuadrante.
Este ángulo se diferencia 180º con 215º - 180º = 35º , tenemos entonces

sen 215º = - sen 35º;
cos 215º = - cos 35º;
tg 215º = tg 35º

EJEMPLO 3:

Dado el ángulo 330º reducirlo al primer cuadrante

SOLUCIÓN:

El ángulo 330º se encuentra en el cuarto cuadrante.
Este ángulo viene representado por el mismo radio vector que el ángulo -30º, tenemos entonces

sen 330º = sen (-30º) = - sen 30º ;
cos 330º = cos (-30º) = cos 30º;
tg 330º = tg (-30º) = - tg 30º

II) REDUCCIÓN PARA ÁNGULOS POSITIVOS MAYORES A UNA VUELTA :

Si a un ángulo positivo "θ" mayor que una vuelta lo dividimos entre **360°** nos da como cociente "**n**" y residuo "α" es decir:

$$\theta = n(360°) + \alpha$$

Las razones trigonométricas de "θ" y las razones trigonométricas de "α" son iguales.

$$\begin{array}{c|c} \alpha & 360° \\ \hline \cdots & k \\ \hline \beta & \end{array}$$

R.T. (α) = R.T. (360°k + β) = R.T. (β)

α=ángulo mayor a una vuelta

k=número de vueltas (cociente)

β=arco sobrante (residuo)

EJEMPLO 1 :

Reducir al primer cuadrante **Sen400°**

RESOLUCIÓN :

Recuerda que si un ángulo positivo θ mayor que una vuelta lo dividimos entre **360°** nos da como cociente **"n"** y residuo α. Es decir : $\theta = n(360°) + \alpha$

La **R.T.** de θ y los **R.T**. de α son iguales

por tanto : **R.T.[n(360°)+ α] = R.T(α)**

Dividimos **400°** entre **360°** , para obtener el número de vueltas que tiene el ángulo .

$$\begin{array}{r|l} 400° & 360° \\ \hline \underline{360°} & 1 \\ 40° & \end{array} \Rightarrow \ \mathbf{sen\,400° = sen\,40°}$$

Es decir :

$$\mathbf{sen\,(400°) = sen(360°+40°) = sen\,40°}$$

EJEMPLO 2 :

$\cos 3244° = \cos 4°$, ya que :

$$\begin{array}{r|l} 3244° & 360° \\ \hline \underline{3240°} & 9 \\ 4° & \end{array}$$

EJEMPLO 3 :

Calcular : **Sen 750°**

RESOLUCIÓN :

$$\begin{array}{r|l} 750° & 360 \\ \hline 30° & 2 \end{array} \Rightarrow \operatorname{Sen}750° = \operatorname{Sen}30° = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 4 :

Calcular : **Cos540°**

RESOLUCIÓN :

$$\begin{array}{r|l} 540° & 360° \\ \hline 180° & 1 \end{array} \Rightarrow \operatorname{Cos}540° = \operatorname{Cos}180° = -1$$

EJEMPLO 5 :

Calcular : **Tan 900°**

RESOLUCIÓN :

$$\begin{array}{r|l} 900° & 360° \\ \hline 180° & 1 \end{array} \Rightarrow \operatorname{Tan}900° = \operatorname{Tan}180° = 0$$

EJEMPLO 6 :

Reducir al primer cuadrante : **Sen3010°**

RESOLUCIÓN :

$$\begin{array}{r|l} 3010° & 360° \\ \hline 130° & 8 \end{array}$$

$\operatorname{Sen}3010° = \operatorname{Sen}130°$

$\operatorname{Sen}3010° = \operatorname{Sen}(180° - 50°)$

$\operatorname{Sen}3010° = +\operatorname{Sen}50°$

EJEMPLO 7 :

Reducir al primer cuadrante :

Cos4910°

RESOLUCIÓN :

$$\begin{array}{r|l} 4910° & 360° \\ \hline 230° & 13 \end{array}$$

$\operatorname{Cos}4910° = \operatorname{Cos}230°$

$\operatorname{Cos}4910° = \operatorname{Cos}(180° - 50°)$