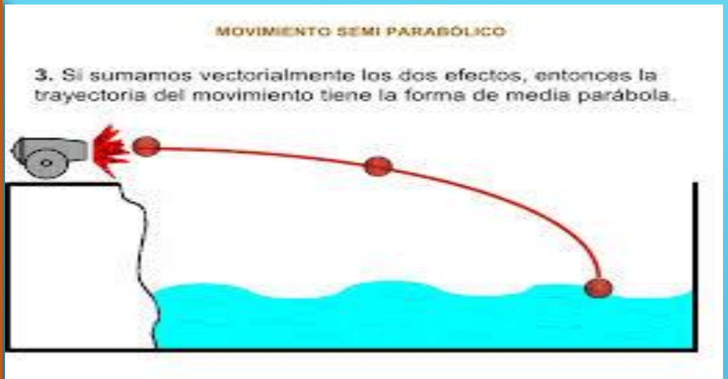
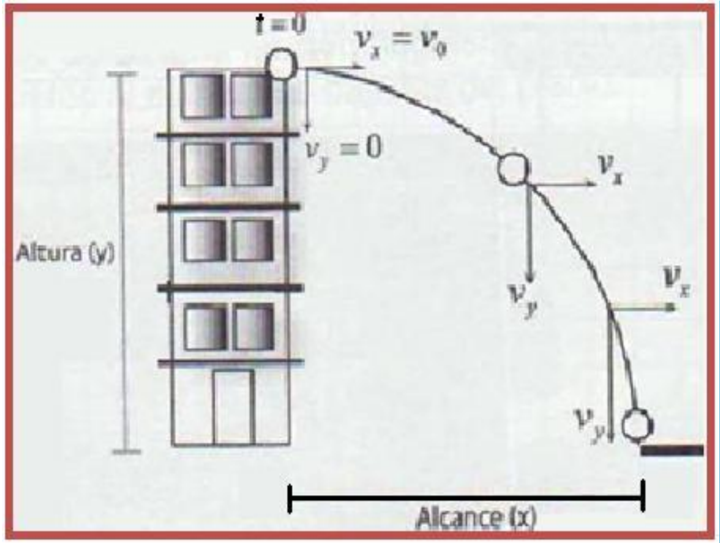
MOVIMIENTO EN EL PLANO

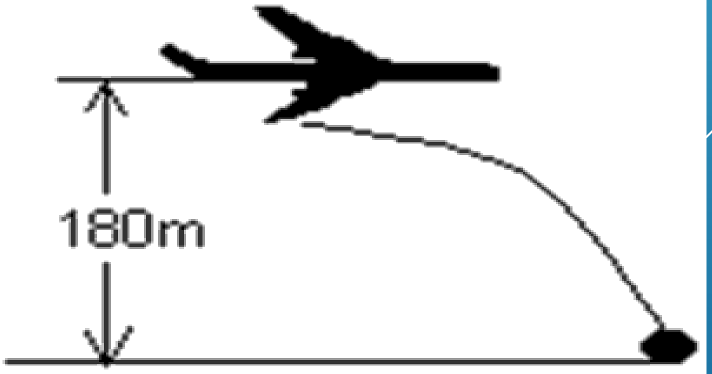
- MOVIMIENTO SEMIPARABÓLICO
- MOVIMIENTO PARABÓLICO
- MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Movimiento semiparabólico

- El movimiento de parábola o semiparabólico (lanzamiento horizontal) se puede considerar como la composición de un avance horizontal rectilíneo uniforme y la caída libre de un cuerpo en reposo.

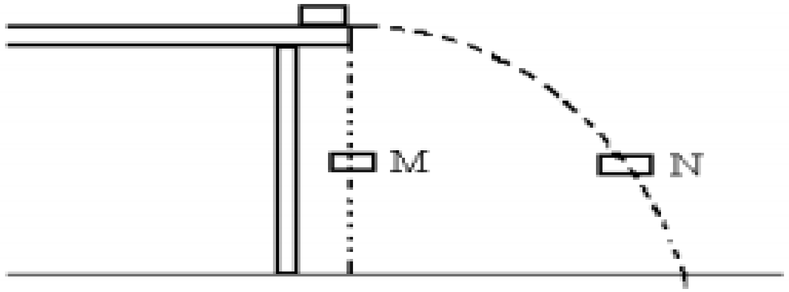


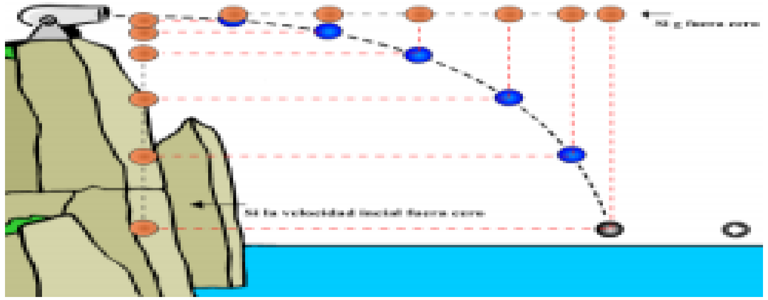




MOVIMIENTO EN EL PLANO CON ACELERACION CONSTANTE

A. MOVIMIENTO SEMIPARABOLICO





En este movimiento los cuerpos están sometidos a dos movimientos: uno horizontal uniforme y el otro vertical acelerado. El cuerpo al lanzarse horizontalmente describe una semiparábola.

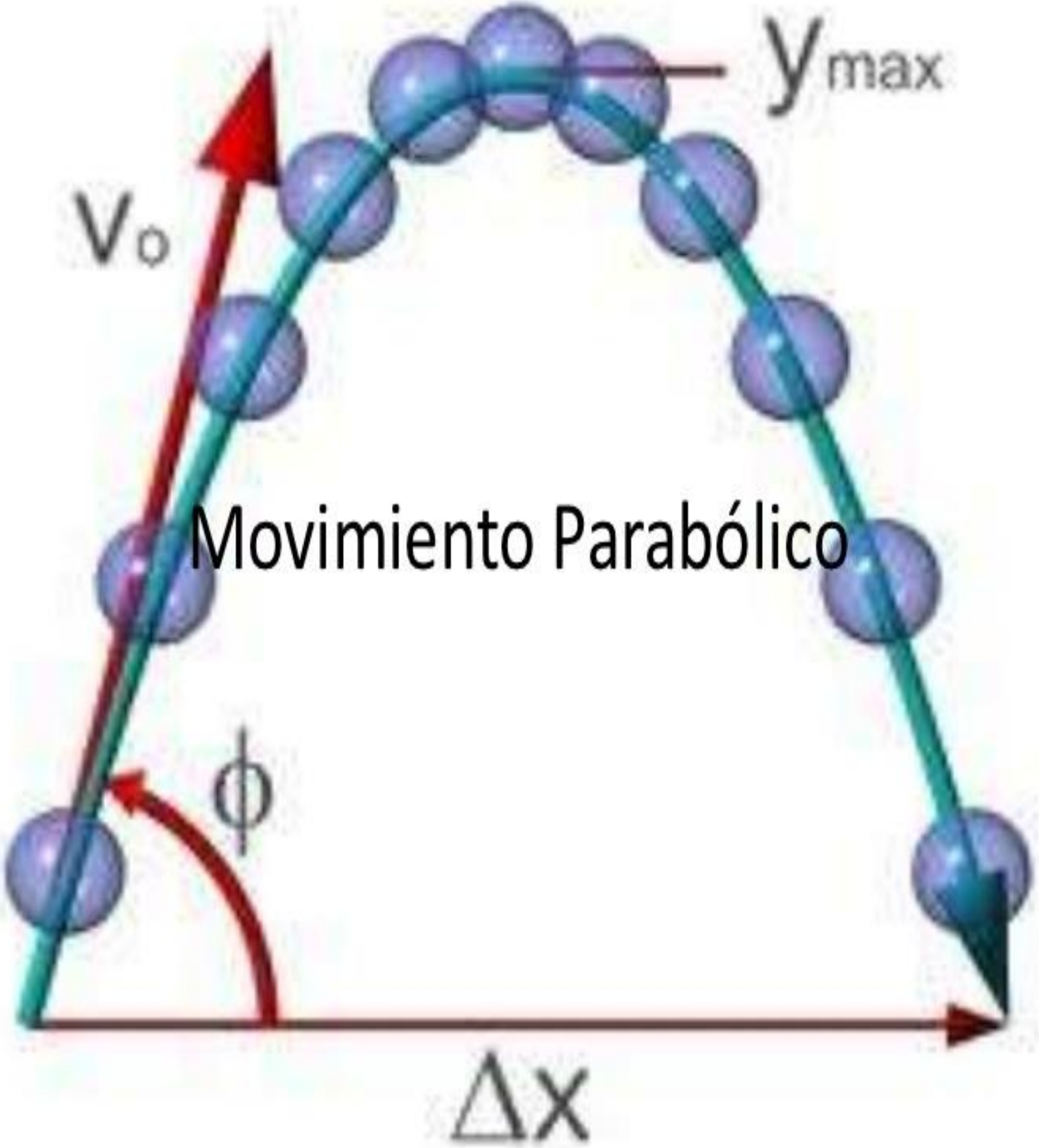
Las ecuaciones utilizadas son:

Para el eje x:

$$x = v_o \cdot t$$

Para el eje y:

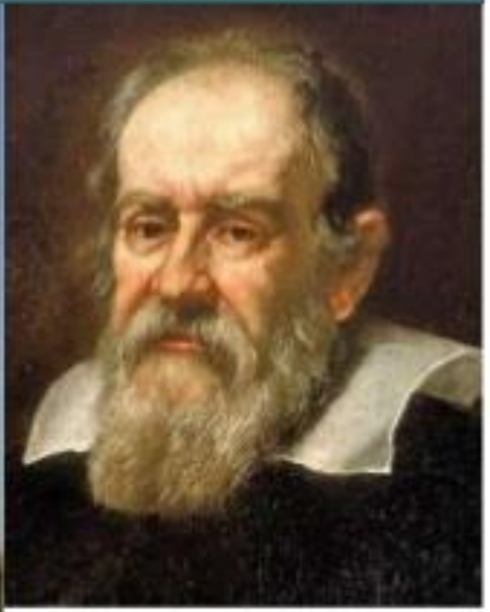
$$y = \frac{gt^2}{2}$$



Movimiento Parabólico

- Se denomina movimiento parabólico al realizado por un objeto cuya trayectoria describe una parábola. Se corresponde con la trayectoria ideal de un proyectil que se mueve en un medio que no ofrece resistencia al avance y que está sujeto a un campo gravitatorio uniforme. Puede ser analizado como la composición de dos movimientos rectilíneos: un movimiento rectilíneo uniforme horizontal y un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado vertical.

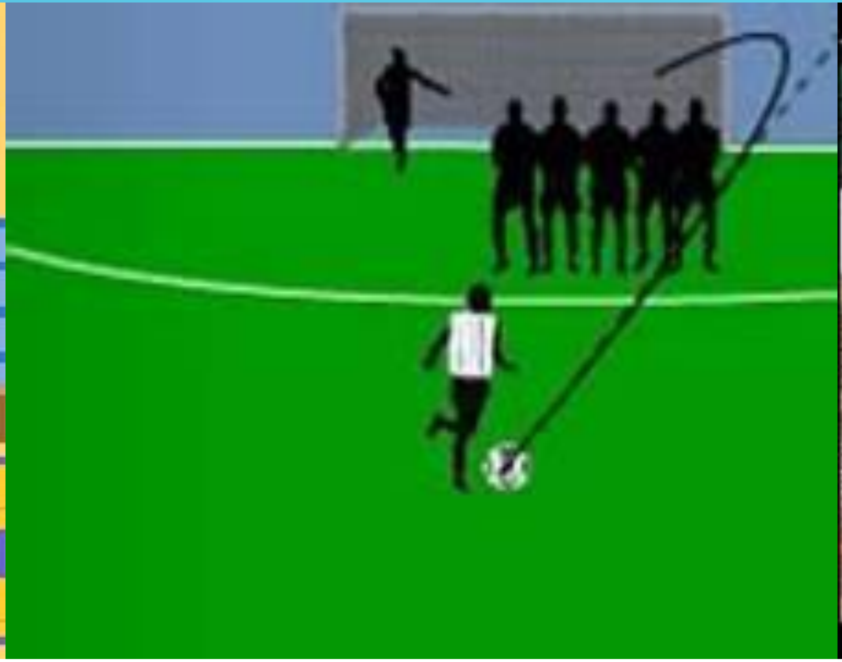
MOVIMIENTO PARABÓLICO DE CAÍDA LIBRE (MPCL)

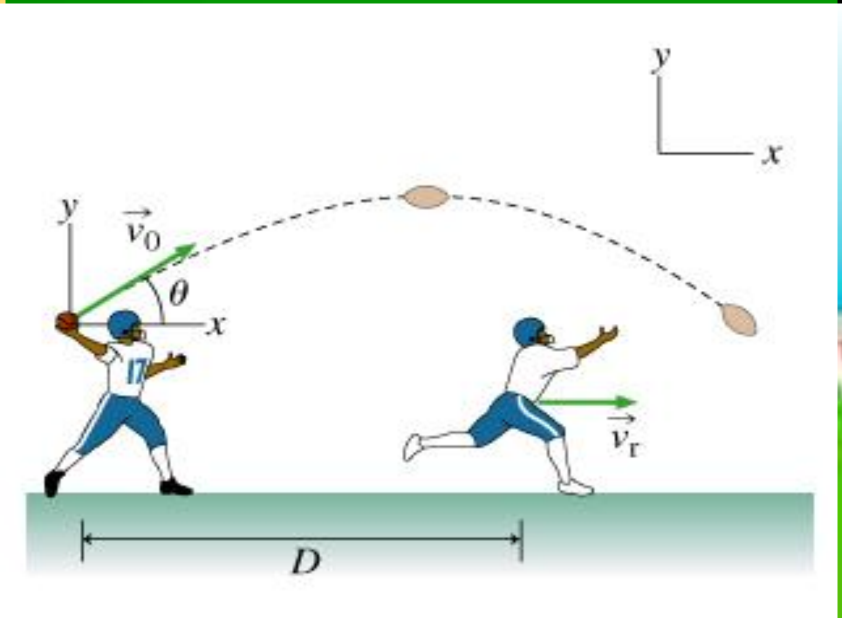


GALILEO GALILEI

CONCEPTO.- Es aquel movimiento que efectúa un cuerpo (proyectil) cerca de la superficie terrestre cuando es lanzado tal que su velocidad forma un ángulo respecto a la horizontal, en este caso el cuerpo describe una trayectoria denominada parábola .Todo cuerpo con MPCL se puede considerar un movimiento compuesto, en la vertical caída libre con aceleración constante denominada aceleración de la gravedad , $g = 9{,}81\ m/s^2$ (valor aproximado $g = 10\ m/s^2$),y en la horizontal con velocidad constante (M.R.U) .

EJEMPLOS DE TIROS PARABÓLICOS



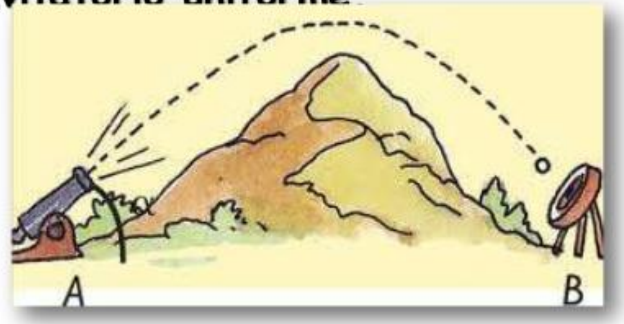


CARACTERISTICAS DEL MOVIMIENTO PARABOLICO

Características

✓Su trayectoria describe una parábola.

✓Se corresponde con la trayectoria ideal de un cuerpo que se mueve en un medio, que no ofrece resistencia al avance y que está sujeto a un campo gravitatorio uniforme.



Características

✓Para lograr la mayor distancia el factor más importante es la velocidad.

✓Se puede analizar el movimiento en vertical independientemente del horizontal.

Características

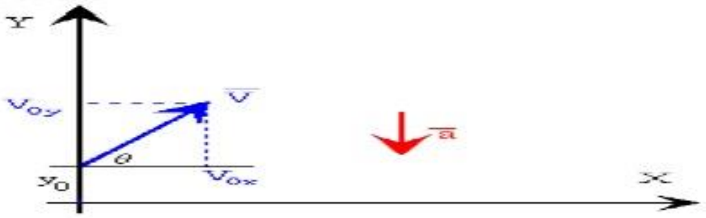
✓Puede ser analizado como la composición de dos movimientos rectilíneos, M.R.U y M.R.U.V.

✓Conociendo la velocidad de salida (inicial), el ángulo de inclinación inicial y la diferencia de alturas (entre salida y llegada) se conocerá toda la trayectoria.

✓Los ángulos de salida y llegada son iguales.

✓La mayor distancia cubierta (alcance) se logra con ángulos de salida de 45°

Ecuaciones del Movimiento Parabólico



En la figura tenemos un proyectil que se ha disparado con una velocidad inicial v_0, haciendo un ángulo θ con la horizontal, las componentes de la velocidad inicial son:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{0y} = v_0 \,\mathrm{sen}\,\theta$$

Movimiento Parabólico

camen charris

$$x_{máx} = \frac{v_i sen 2\theta}{g}$$

ECUACIONES DEL MOVIMIETO PARABOLICO

Magnitud	Componente x	Componente y
aceleración	$a_x = 0$	$a_y = -g$
velocidad	$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} - gt$
posición	$x = v_{0x}t$	$y = v_{0y}t - (1/2)gt^2$

camen charris

ALTURA MÁXIMA QUE ALCANZA EL OBJETO

$$h_{máx} = \frac{v_i^2 sen^2\theta}{2g}$$

TIEMPO DE VUELO

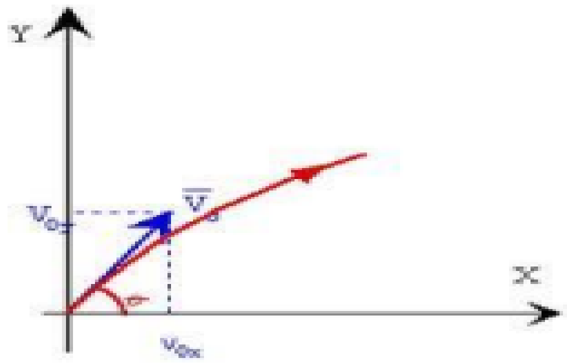
$$t_v = \frac{2v_i sen\theta}{g}$$

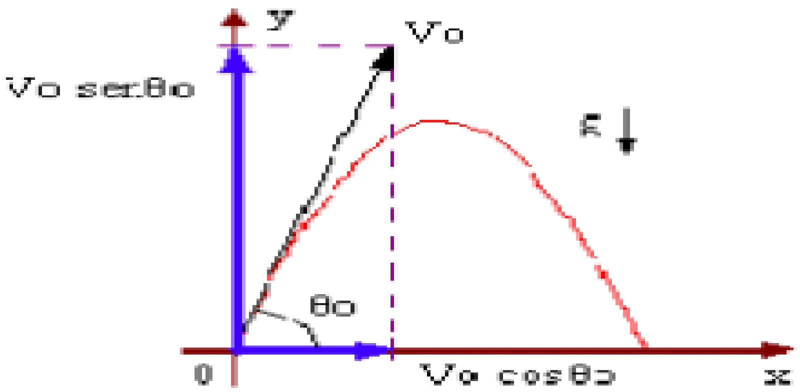
ALCANCE HORIZONTAL

$$x_{máx} = \frac{v_i sen 2\theta}{g}$$

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE PROYECTILES

- Componentes de la velocidad

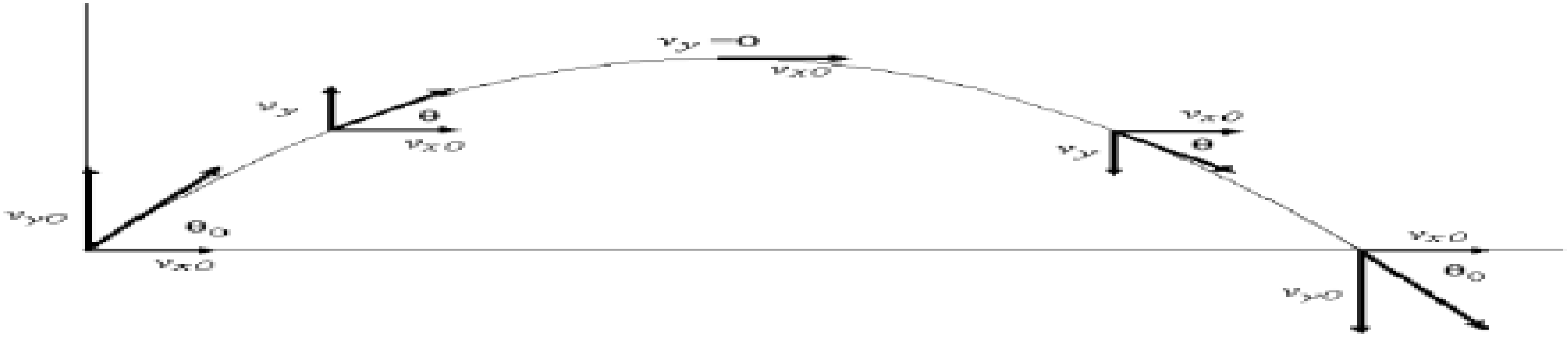




$v_{ox} = v_o \cos\Theta$

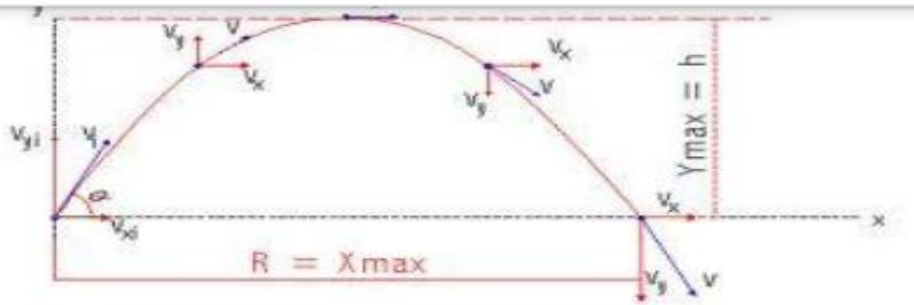
$v_{oy} = v_o \text{sen}\Theta$

- Velocidad vertical



$$v_y = v_o sen\theta - gt$$

Altura máxima que alcanza el proyectil



$$y_{max} = \frac{v_o^2 sen^2\theta}{2g}$$

- Tiempo de vuelo del proyectil:

$$t_v = \frac{2v_o sen\theta}{g}$$

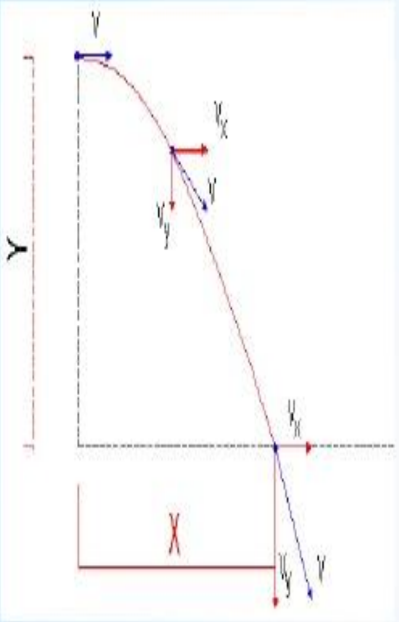
- Alcance horizontal:

$$X_{max} = \frac{2v_o^2 cos\theta sen\theta}{g}$$

O

$$X_{max} = \frac{v_o^2 sen2\theta}{g}$$

*FORMULAS DEL MOVIMIENTO SEMIPARABOLICO



* V: VELOCIDADA DE LLEGADA AL SUELO

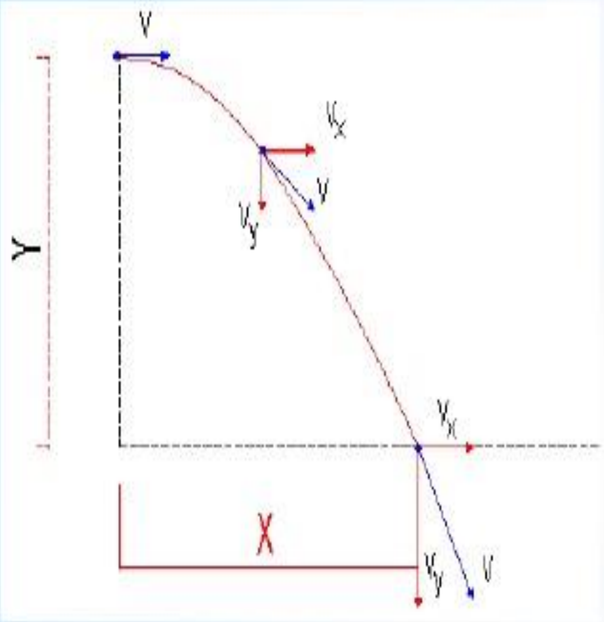
X: ALCANCE HORIZONTAL

h: ALTURA DE LANZAMIENTO O CAIDA

T: TIEMPO

g: ACELERACION DE LA GRAVEDAD

*FORMULAS DEL MOVIMIENTO SEMIPARABOLICO



* EN EL EJE HORIZONTAL X

$$x = v_o.t$$

* EN EL EJE VERTICAL Y

$$v_y = g.t$$

* $h = \dfrac{g.t^2}{2}$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$g = 10m/s^2$$

* VELOCIDAD DE LLEGADA AL SUELO

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$donde: v_x = v_o$$

* DONDE:

Vo :velocidad de lanzamiento horizontal

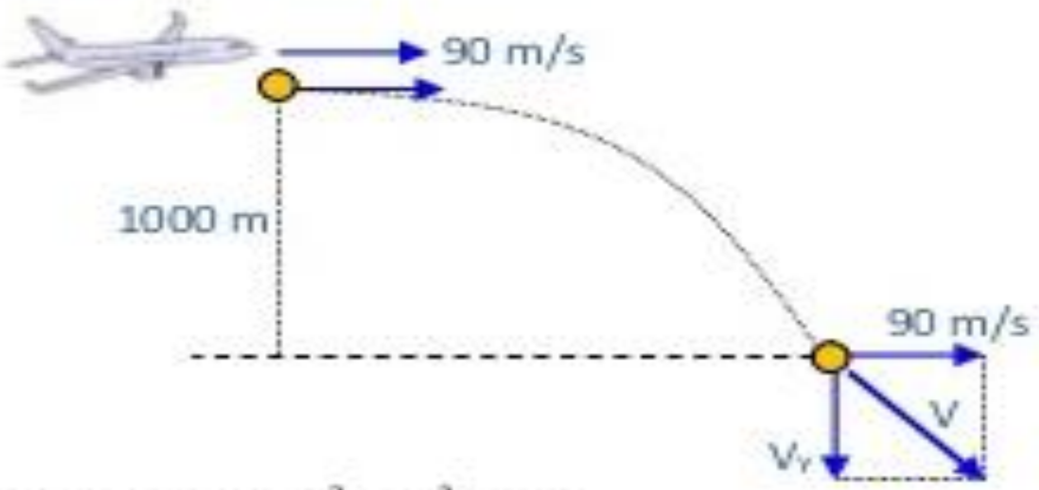
Vf :velocidad de caida vertical

EJERCICIOS RESUELTOS

01 Un avión que vuela horizontalmente a razón de 90 m/s deja caer una piedra desde una altura de 1 000 m. ¿Con qué velocidad (aproximadamente) llega la piedra a tierra si se desprecia el efecto del rozamiento del aire?

A) 140 m/s B) 166,4 m/s C) 230 m/s
D) 256,4 m/s E) 345,6 m/s

Resolución:



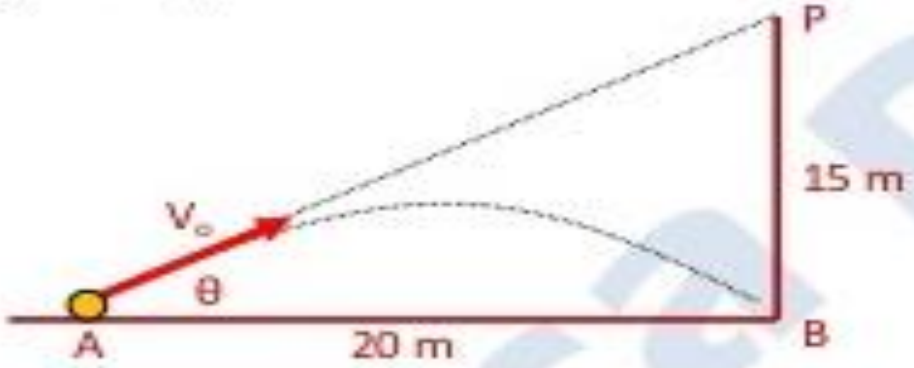
Verticalmente: $V_F^2 = V_i^2 + 2gh$

Luego: $V_Y^2 = 0 + 2(-9,8)(-1000) \rightarrow V_Y = 140$ m/s

La velocidad con que llega al piso es:

$V = \sqrt{90^2 + 140^2} \rightarrow V = 166,4$ m/s ... (B)

02 Desde A se lanza un proyectil con dirección al punto P. ¿Cuál debe ser la velocidad inicial V_o (en m/s) para que el proyectil impacte en el punto B? ($g = 10$ m/s^2)



A) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{25}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{15}{\sqrt{3}}$
D) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ E) $25\sqrt{3}$

Resolución:

Usando la ecuación: $L = \frac{V_o^2\,Sen2\theta}{g}$

Donde: $Tg\theta = \frac{15}{20} \rightarrow \theta = 37º$; L = 20 m

Luego: $20 = \frac{V_o^2\,(2\,Sen37º\,Cos37º)}{10}$

$V_o = \frac{25}{\sqrt{3}}\ m/s$ ... (B)

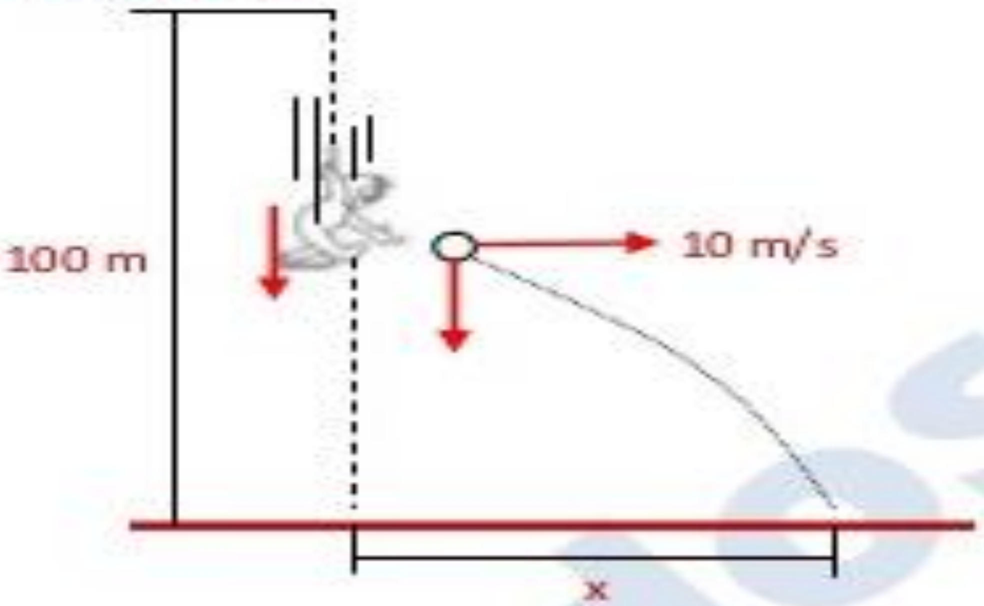
03 Un hombre cae desde el reposo desde una altura de 100 m después de caer 2 s lanza un paquete horizontalmente con una velocidad de 10 m/s. ¿A qué distancia (en metros) aproximadamente de su dirección vertical caerá el paquete?

($g = 10\ m/s^2$; $\sqrt{5} = 2{,}25$)

A) 2,5 B) 50 C) 25

D) 40 E) 12

Resolución:



El tiempo que tarda la persona en llegar al piso:

$h = v_o t + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow -100 = \frac{1}{2}(-10)t^2$

Luego: $t = 2\sqrt{5}\ s$

El paquete es lanzado 2 s después que la persona se deja caer; luego el paquete tardará, en llegar al piso: $t = 2\sqrt{5} - 2 = 2(2{,}25) - 2 = 2{,}5$ s

La distancia horizontal que se desplazará el paquete es igual a: $x = vt$

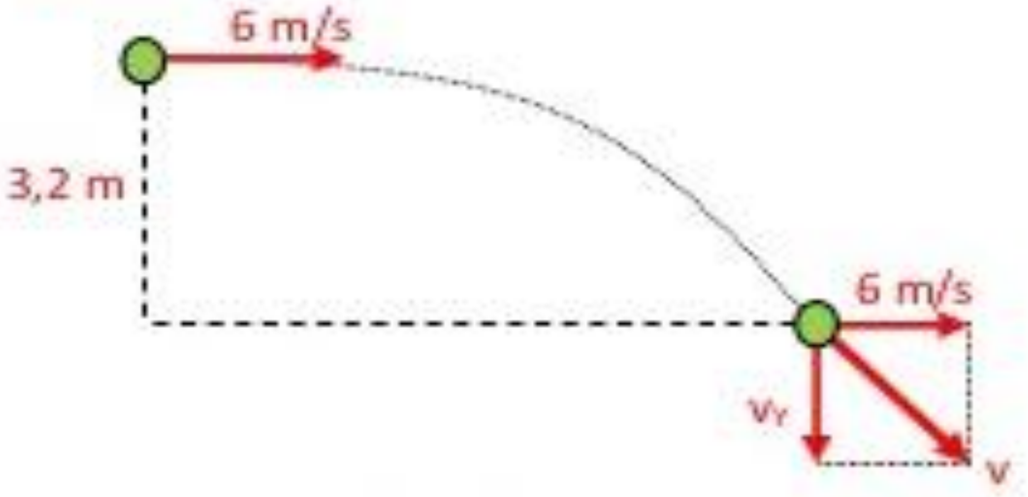
$x = (10\ m/s)(2{,}5\ s) = 25$ m ... **(C)**

04 Desde una altura de 3,2 m un cuerpo es lanzado horizontalmente con 6 m/s. ¿Con qué velocidad (en m/s) llegará al piso? ($g = 10\ m/s^2$)

A) 6 B) 8 C) 10

D) 12 E) 14

Resolución:



Verticalmente: $v_F^2 = v_i^2 + 2gh$

Luego: $v_Y^2 = 0 + 2(-10)(-3,2) = 64 \rightarrow v_Y = 8$ m/s

La velocidad del cuerpo al llegar al piso es:

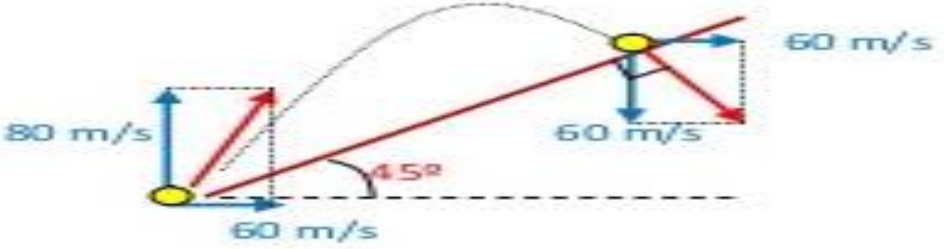
$v = \sqrt{6^2 + 8^2} \rightarrow v = 10$ m/s ... **(C)**

05 Se lanza una bola con una velocidad de 100 m/s haciendo un ángulo de 53º con la horizontal. La bala impacta perpendicularmente en un plano inclinado que hace un ángulo de 45º con la horizontal, como se muestra en la figura. Calcular el tiempo de vuelo (en segundos) de la bala.
($g = 10\ m/s^2$)

A) 14 B) 10 C) 2

D) 8 E) 16

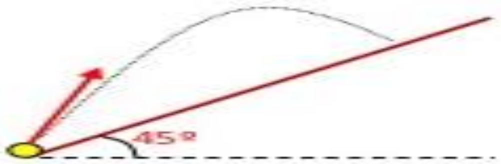
Resolución:



Verticalmente, usamos la ecuación: $v_F = v_i + gt$

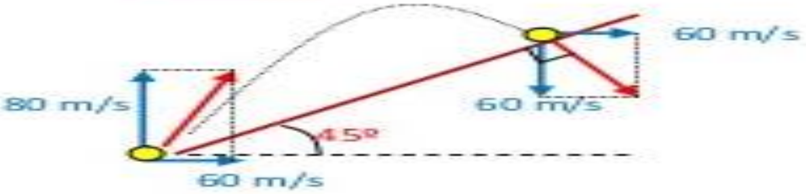
Reemplaza datos: $-60 = +80 + (-10)t$

Luego: $t = 14$ s ... **(A)**



A) 14 B) 10 C) 2
D) 8 E) 16

Resolución:



Verticalmente, usamos la ecuación: $v_F = v_i + gt$
Reemplaza datos: $-60 = +80 + (-10)\,t$
Luego: t = 14 s ... **(A)**

06 En un partido de fútbol, un futbolista comunica a una pelota la velocidad de 10 m/s con un ángulo de 37º con la horizontal. Si se encuentra en ese instante a 8 m de distancia del arco contrario, ¿hay posibilidades de gol?. La altura del arco es de 2,5 m. ($g = 10\ m/s^2$)

A) La pelota sale fuera del arco
B) Faltan datos.
C) Sí, hay gol
D) Choca en el madero superior.
E) La pelota no llega al arco

Resolución:

Determinemos el tiempo que tarda la pelota en recorrer horizontalmente los 8 m:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{8\ m}{8\ m/s} = 1\ s$$

La altura que alcanza la pelota en 1 s, es:

$$h = v_i t + \frac{1}{2} g t^2$$

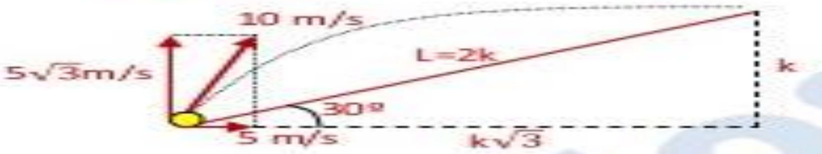
$$h = (6)(1) + \frac{1}{2}(-10)(1)^2 = 1\ m$$

La altura de 1 m es menor que la altura del arco (2,5 m); entonces: HAY GOOLLL .... **(C)**

07 Un proyectil es lanzado con una velocidad inicial de 10 m/s, que hace un ángulo de 60º con la horizontal contra un plano inclinado que forma 30º con la horizontal. Calcule el alcance (en m) sobre el plano inclinado.(considere: $g = 10\ m/s^2$)

A) 6,15 B) 5,88 C) 6,66
D) 7,42 E) 4,84

Resolución:

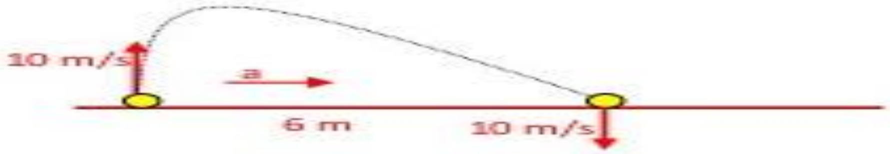


Verticalmente: $h = v_i t + \frac{1}{2} g t^2$
$k = 5\sqrt{3}t - 5t^2$ ... (I)
Horizontalmente: d = vt
$k\sqrt{3} = 5\ t$ .... (II)
Dividiendo las ecuaciones (I) y (II): $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ s$
En la ecuación (I): k = 10/3
Luego: L = 2k = 2(10/3) → L = 6,66 m ... **(C)**

08 Verticalmente hacia arriba una pelota con una velocidad de 10 m/s cae a 6 m del punto de lanzamiento. Calcule la aceleración constante que sobre la piedra produce el viento. ($g = 10\ m/s^2$)

A) 2 m/s^2 B) 3 m/s^2 C) 4 m/s^2
D) 5 m/s^2 E) 6 m/s^2

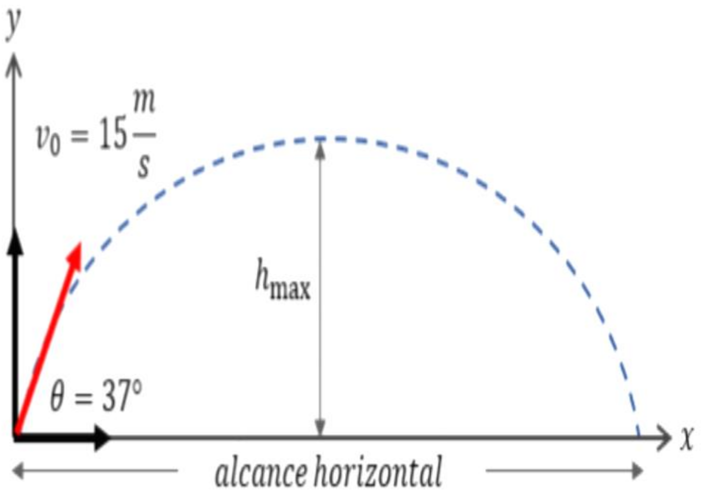
Resolución:



El movimiento vertical es de caída libre:
Usamos la ecuación: $v_F = v_i + gt$
Reemplaza datos: $-10 = +10 + (-10)t \rightarrow t = 2\ s$
El movimiento horizontal es MRUV:
Usamos la ecuación: $d = v_i t + \frac{1}{2} a t^2$
Reemplaza datos: $6 = (0)(2) + \frac{1}{2}(a)(2)^2$
Finalmente: a = 3 m/s^2 .... **(B)**

09 Un cañón inclinado en 45º lanza un proyectil con velocidad V logrando derribar una pequeña choza ubicada en la loma. Calcule el valor de V. ($g = 10\ m/s^2$)

Problema 4. Un jugador de los Patriotas de la NFL le pega al balón con un ángulo de 37° con respecto al plano horizontal, imprimiéndole una velocidad inicial de 15 m/s, tal como se muestra en la imagen de abajo. Calcule: a) el tiempo que dura la pelota en el aire, b) La altura máxima, c) El alcance horizontal



Solución:

En este ejercicio, nos piden encontrar tres puntos muy interesantes del problema:

- Tiempo que dura la pelota en el aire
- La altura máxima alcanzada
- El alcance horizontal

a) Obteniendo el tiempo que dura la pelota en el aire

Vamos a utilizar la siguiente fórmula:

$$T_t = \frac{2v_0 sen\theta}{g}$$

Si sustituimos nuestros datos

$$T_t = \frac{2v_0 sen\theta}{g} = \frac{2\left(15\frac{m}{s}\right) sen37^{\circ}}{9.8\frac{m}{s^2}} = 1.84s$$

Obtenemos un total de **1.84 segundos** que dura la pelota en el aire.

b) Obteniendo la altura máxima alcanzada

Para obtener la altura máxima alcanzada, vamos a utilizar la siguiente fórmula:

$$h_{\max} = \frac{v_0{}^2 sen^2\theta}{2g}$$

Nuevamente, sustituimos nuestros datos en la fórmula y obtenemos:

$$h_{\max} = \frac{v_0{}^2 sen^2\theta}{2g} = \frac{\left(15\frac{m}{s}\right)^2 (sen 37°)^2}{2\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)} = 4.157m$$

Con esto se obtiene una altura máxima alcanzada de **4.157 metros.**

c) Obteniendo el alcance horizontal

En el caso del alcance horizontal, debemos recurrir a la siguiente fórmula:

$$x = v_{0x}t$$

Para conocer la velocidad que se genera en el eje "X", debemos multiplicar el valor del vector velocidad por el coseno del ángulo de 37°, de esta forma:

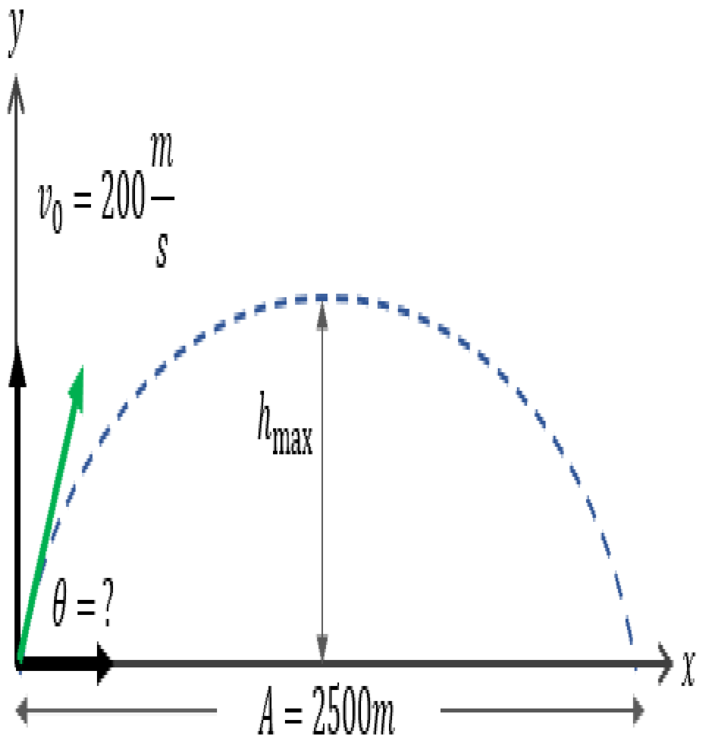
$$v_{0x} = v_o \cos 37° = \left(15\frac{m}{s}\right) \cos 37° = 11.98\frac{m}{s}$$

Ahora si podemos aplicar la fórmula del alcance horizontal, y esto nos daría:

$$x = v_{0x}t = \left(11.98\frac{m}{s}\right)(1.84s) = 22.04m$$

Es decir, un alcance horizontal de **22.04 metros**

Problema 5. Una bala se lanza con una velocidad inicial cuya magnitud es de 200 m/s, si se desea que dicha bala golpee a un blanco que está localizado a 2500 metros, entonces calcule: a) El ángulo con el cual debe ser lanzada, b) El tiempo que tarda en llegar al blanco



a) Obteniendo el ángulo

Para obtener el ángulo de la bala, es importante que nos enfoquemos en la siguiente fórmula:

$$A = \frac{v_0^2 sen2\theta}{g}$$

Despejando a Sen 2θ

$$sen2\theta = \frac{A \cdot g}{v_0^2}$$

Sustituyendo los datos en la fórmula:

$$sen2\theta = \frac{A \cdot g}{v_0^2} = \frac{(2500m)(9.8\frac{m}{s})}{(200\frac{m}{s})^2} = 0.6125$$

Es decir:

$$sen2\theta = 0.6125$$

Ahora procedemos a despejar al seno como “arcoseno”.

$$2\theta = arcsen(0.6125)$$

$$2\theta = 37.77°$$

Despejando al ángulo θ

$$\theta = \frac{37.77°}{2} = 18.88°$$

Es decir que el ángulo es de **18.88°** .

b) Obteniendo el tiempo que tarda en llegar al blanco

Vamos a utilizar la siguiente fórmula:

$$T_t = \frac{2v_0 sen\theta}{g}$$

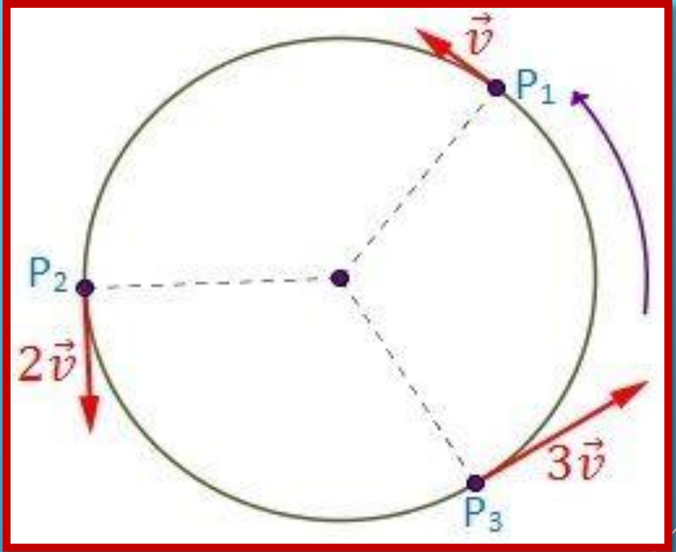
Sustituyendo los datos en la fórmula:

$$T_t = \frac{2v_0 sen\theta}{g} = \frac{2(200\frac{m}{s})(sen18.88°)}{9.8\frac{m}{s^2}} = 13.20s$$

Es decir, un tiempo total de **13.20 segundos**

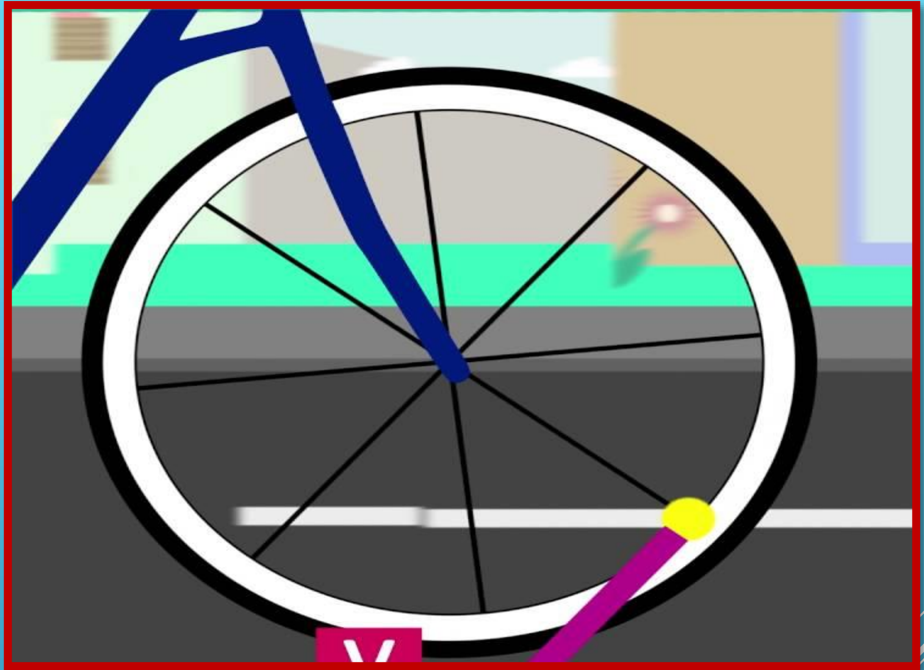
MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

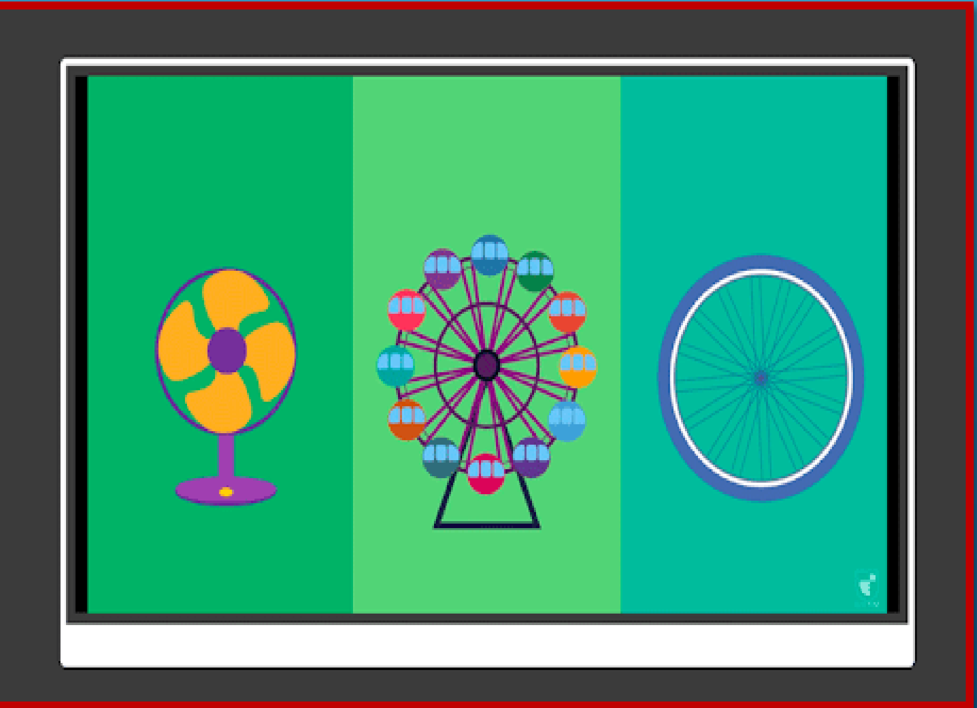
El movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA) se presenta cuando una partícula o cuerpo sólido describe una trayectoria circular aumentando o disminuyendo la velocidad de forma constante en cada unidad de tiempo. Es decir, la partícula se mueve con aceleración constante.



En el dibujo se observa un ejemplo en donde la velocidad aumenta linealmente en el tiempo. Suponiendo que el tiempo en llegar del punto P_1 a P_2 sea una unidad de tiempo, la partícula viaja con una aceleración tangencial uniforme v, incrementándose esa cantidad en cada unidad de tiempo.

Se define como movimiento circular aquél cuya trayectoria es una circunferencia.
El movimiento circular, llamado también curvilíneo, es otro tipo de movimiento sencillo.
Estamos rodeados por objetos que describen movimientos circulares: un disco compacto durante su reproducción en el equipo de música, las manecillas de un reloj o las ruedas de una motocicleta son ejemplos de movimientos circulares; es decir, de cuerpos que se mueven describiendo una circunferencia.





EJEMPLOS RESUELTOS DE MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

1. La luna hace una revolución completa en 28 días, si la distancia promedio entre la Luna y la Tierra es de $38,4 \times 10^7$ m, aproximadamente, halle la velocidad tangencial de la Luna con respecto a la Tierra.

a) 990 m/s b) 987 m/s
c) 992 m/s d) 997 m/s
e) 1000 m/s

Solución:
El período de la Luna es 28 días

$$T = 28 \times 24 \times 3600 \text{ s}$$

La velocidad tangencial se define como:

$$V = \omega R \quad \Rightarrow \quad V = \frac{2\pi R}{T}$$

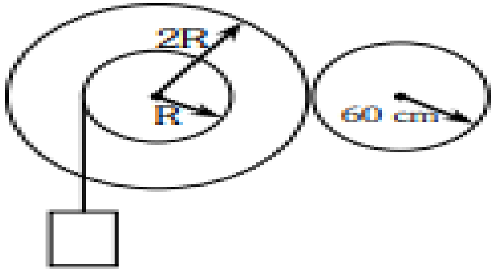
Sustituyendo variables:

$$V = \frac{2\pi(38,4 \times 10^7)}{28 \times 24 \times 3600}$$

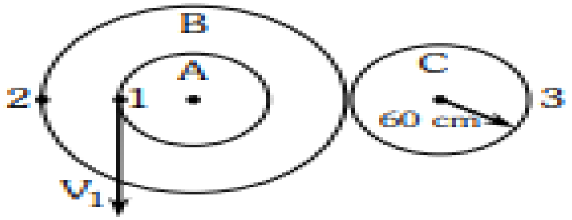
$$V = \boxed{997 \text{ m/s}}$$ **Rpta.**

9. Hallar la velocidad angular (en rad/s) del tambor de 60 m de radio en el momento en que la carga desciende a razón de 6 m/s. Los tambores de radios "R" y "2R" son solidarios.

a) 18
b) 20
c) 24
d) 25
e) 28



Solución:
Seleccionemos un par adecuado de tambores:



$$\omega_1 = \omega_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2}$$

$$\frac{6}{R} = \frac{V_2}{2R} \quad \Rightarrow \quad V_2 = 6 \text{ m/s}$$

En los tambores B y C:

$$V_3 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 R_3 = 12$$

$$\omega_3 = \frac{12}{0,6} = \boxed{20 \text{ rad/s}}$$ **Rpta.**

- *Un móvil da tres vueltas sobre una circunferencia de 300 metros de diámetro a velocidad constante y tarda 2 minutos en hacerlo.*

Calcular:

Frecuencia

- *Período*
- *Velocidad angular*
- *Velocidad tangencial*
- *Aceleración centrípeta*

Solución

Convertimos las el tiempo a segundos.

$$2\,min = 120\,s$$

Calculamos la frecuencia a través de su definición.

$$f = \frac{3}{120\,s} = 0{,}025\,Hz$$

Calculamos el período como la inversa de la frecuencia.

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}025\,Hz} = 40\,s$$

Obtenemos la velocidad angular a partir de la frecuencia.

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 0{,}16\,\frac{rad}{s}$$

Calculamos la velocidad tangencial multiplicando la velocidad angular (en radianes) por el radio.

$$v = \omega \cdot r = 0{,}16\ \frac{rad}{s} \cdot 150\, m = 24\ \frac{m}{s}$$

Otra manera de haberla calculado es a través de su definición, es decir haciendo el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado, sabiendo que recorrió el perímetro de la circunferencia tres veces en 120 segundos.

Por último hallamos la aceleración centrípeta.

$$a_c = v \cdot \omega = 24\ \frac{m}{s} \cdot\ 0{,}16\ \frac{rad}{s} = 3{,}84\ \frac{m}{s^2}$$