SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO	SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO	SISTEMA INCOMPATIBLE
La solución es única. Analíticamente se obtiene un valor para x y un valor para y . Gráficamente las rectas se cortan en punto. Las rectas tienen distinta pendiente.	Tiene infinitas soluciones. Analíticamente se llega a la expresión: $0.x=0$ o bien $0.y=0$. Gráficamente las rectas están superpuestas. Las rectas tienen igual pendiente e igual ordenada al origen.	No tiene solución. Analíticamente se llega a la expresión: $0.x=a$ o bien $0.y=a$, siendo $a\neq0$. Gráficamente las rectas son paralelas. Las rectas tienen igual pendiente y distinta ordenada al origen.

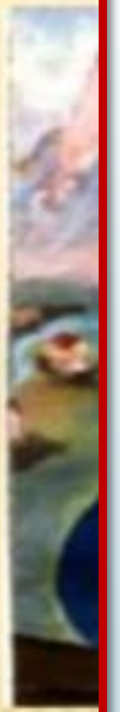
SISTEMAS DE ECUACIONES DE 2X2 O DE PRIMER GRADO

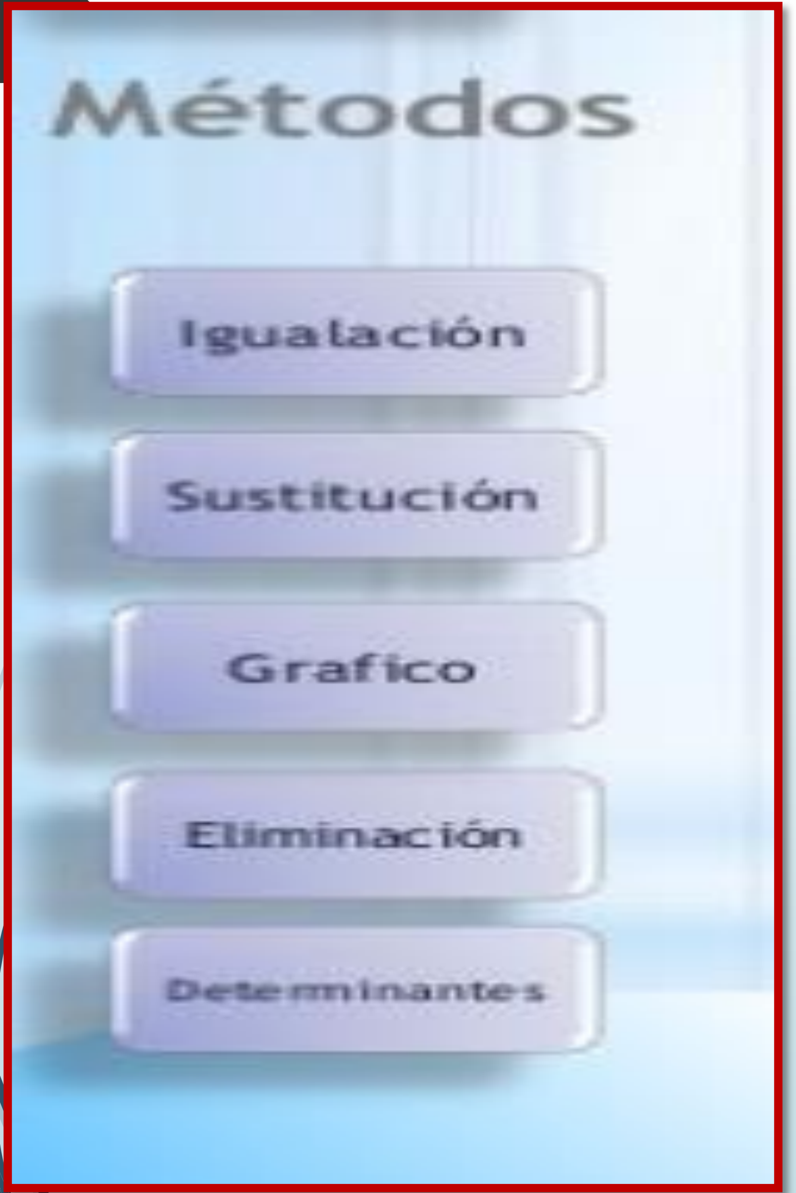
- Son sistemas de agrupación de 2 ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

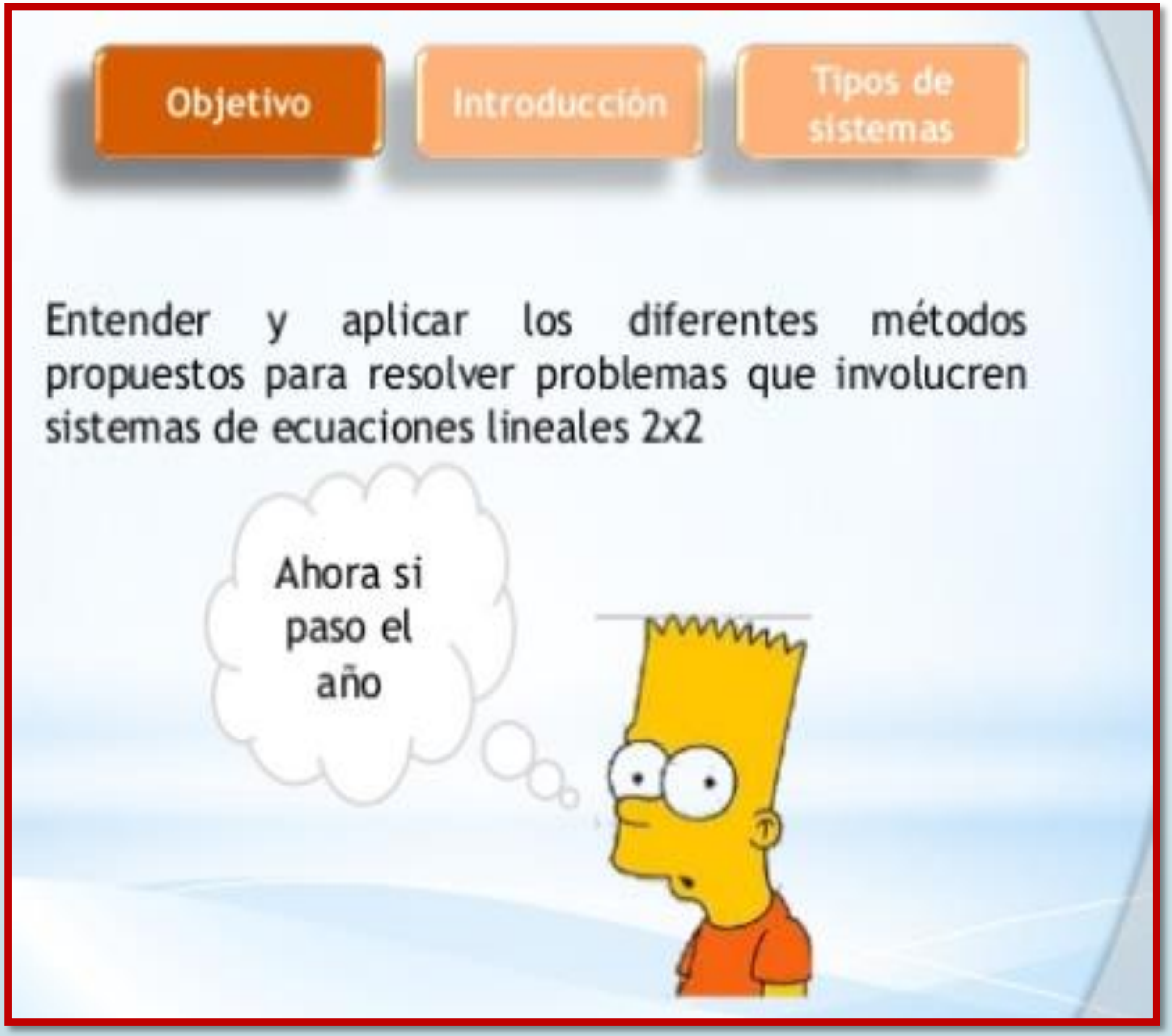
$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\}$$

METODOS DE SOLUCION

- Existen diversos métodos para la solución de ecuaciones de 2x2.
- Se encuentra el método por sustitución, igualación, reducción y un método grafico




Métodos
Igualación
Sustitución
Grafico
Eliminación
Determinantes

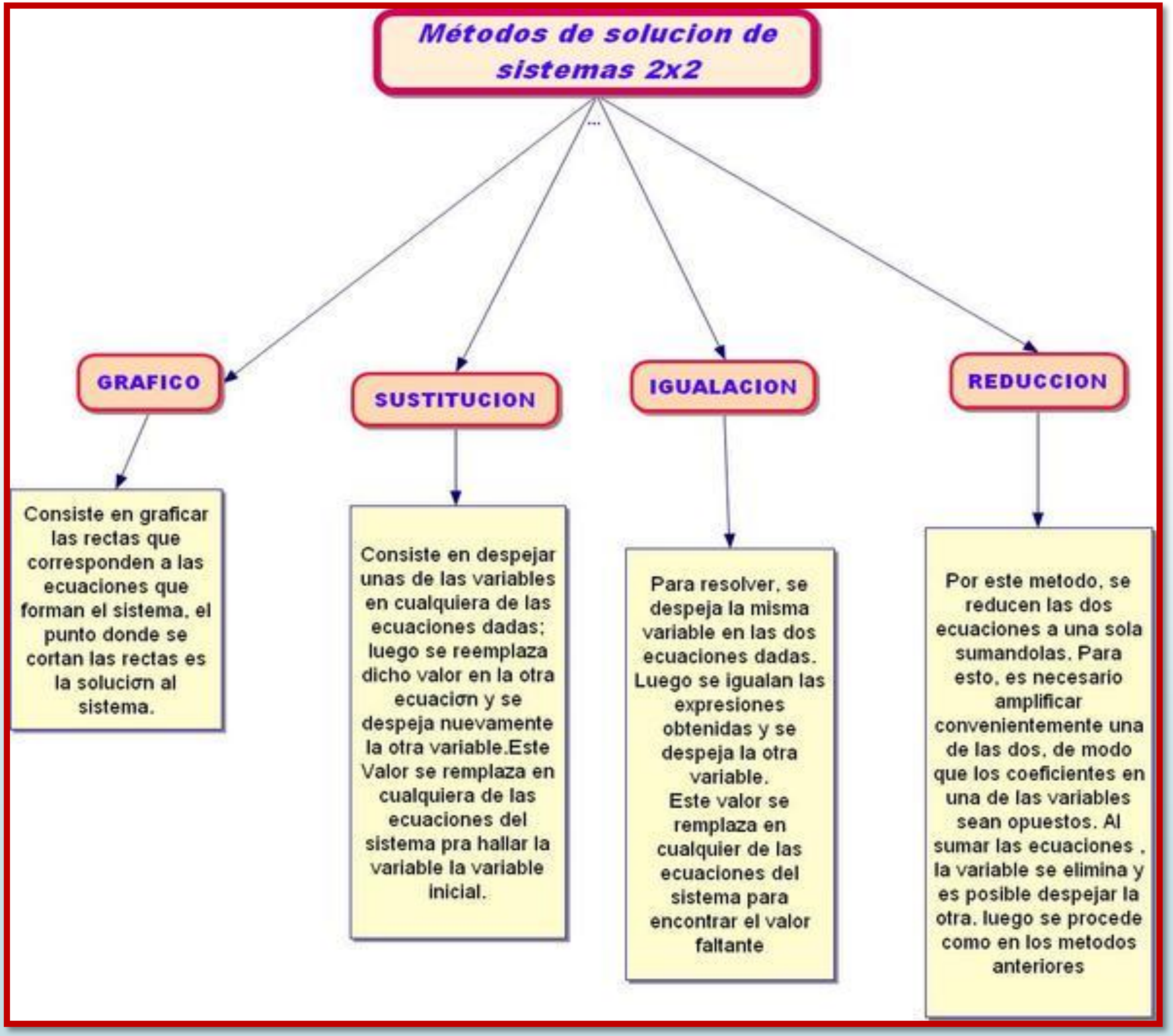

Objetivo
Introducción
Tipos de sistemas
Entender y aplicar los diferentes métodos propuestos para resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales 2x2
Ahora si paso el año

Objetivo

Introducción

Tipos de sistemas

Un **sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas** es un sistema que admite un tratamiento particularmente simple, junto con el caso trivial de una ecuación lineal con una única incógnita, es el caso más sencillo posible de sistemas de ecuaciones, y que permiten su resolución empleando técnicas básicas del álgebra



1. METODO DE IGUALACION

MÉTODO POR IGUALACIÓN

- 1 Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
- 2 Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.
- 3 Se resuelve la ecuación.
- 4 El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.
- 5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

EJEMPLO IGUALACIÓN

$x + 2y = 3$

$2x - y = 1$

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones, en este caso voy a despejar la x:

$x = 3 - 2y$

$x = (1 + y)/2$

Y ahora se igualan (de ahí viene el nombre del método):

$3 - 2y = (1 + y)/2$

$2 \cdot (3 - 2y) = 1 + y$

$6 - 4y = 1 + y$

$-4y - y = 1 - 6$

$-5y = -5$

$y = -5/-5 = 1$

Ahora se sustituye la y en una de las dos ecuaciones donde está despejada la x:

$x = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$

La solución es:

$(1,1)$

VEAMOS OTRO EJEMPLO PASO A PASO

Sistema de ecuaciones lineales 2x2

$$2x + 3y = 20$$
$$x - 2y = 3$$

Método de igualación

Paso 1.
Se elige cualquiera de las incógnitas y se despeja en ambas ecuaciones.

Paso 2.
Se igualan las expresiones, obteniendo una ecuación con una incógnita.

Paso 3.
Se resuelve la ecuación resultante.

Paso 4.
El valor obtenido se reemplaza en cualquiera de las dos expresiones del primer paso.

Paso 5.
Solución del sistema.

$$\boxed{\begin{matrix} y = 2 \\ x = 7 \end{matrix}}$$

Despejar la variable x

Ecuación 1

$$2x + 3y = 20$$
$$2x = 20 - 3y$$
$$\boxed{x = \frac{20 - 3y}{2}}$$

Ecuación 2

$$x - 2y = 3$$
$$\boxed{x = 3 + 2y}$$

Igualar

$$\frac{20 - 3y}{2} = 3 + 2y$$
$$20 - 3y = (3 + 2y)(2)$$
$$20 - 3y = 6 + 4y$$
$$20 - 6 = 4y + 3y$$
$$14 = 7y$$
$$\frac{14}{7} = y$$
$$\boxed{y = 2}$$

$$x = 3 + 2y$$
$$x = 3 + 2(2)$$
$$x = 3 + 4$$
$$\boxed{x = 7}$$

EJEMPLO 3:

$$x + y = 7$$

$$5x - 2y = -7$$

DESPEJAMOS

$$x = 7 - y$$

$$x = \frac{+2y-7}{5}$$

IGUALAMOS

$$\frac{+2y-7}{5} = 7 - y$$

$$2y - 7 = 5.(\ 7 - y)$$

$$2y - 7 = 35 - 5y$$

$$2y + 5y = 35 + 7$$

$$7y = 42$$

$$y = 6$$

SUSTITUÍMOS

$$x = 7 - y$$

$$x = 7 - 6 = 1$$

$$\boxed{\begin{matrix} y = 6 \\ x = 1 \end{matrix}}$$

2. METODO DE SUSTITUCIÓN

MÉTODO POR SUSTITUCIÓN

- 1 Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
- 2 Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo un ecuación con una sola incógnita.
- 3 Se resuelve la ecuación.
- 4 El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
- 5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

$$\begin{cases} 10a-3b=36 & (1) \\ 2a+5b=-4 & (2) \end{cases}$$

De la ecuacion (2) despejamos a

$$a=\frac{-4-5b}{2}$$

Sustituimos a en la ecuacion (1)

$$10a-3b=36 \Rightarrow \quad 10\left(\frac{-4-5b}{2}\right)-3b=36$$

Encontramos b

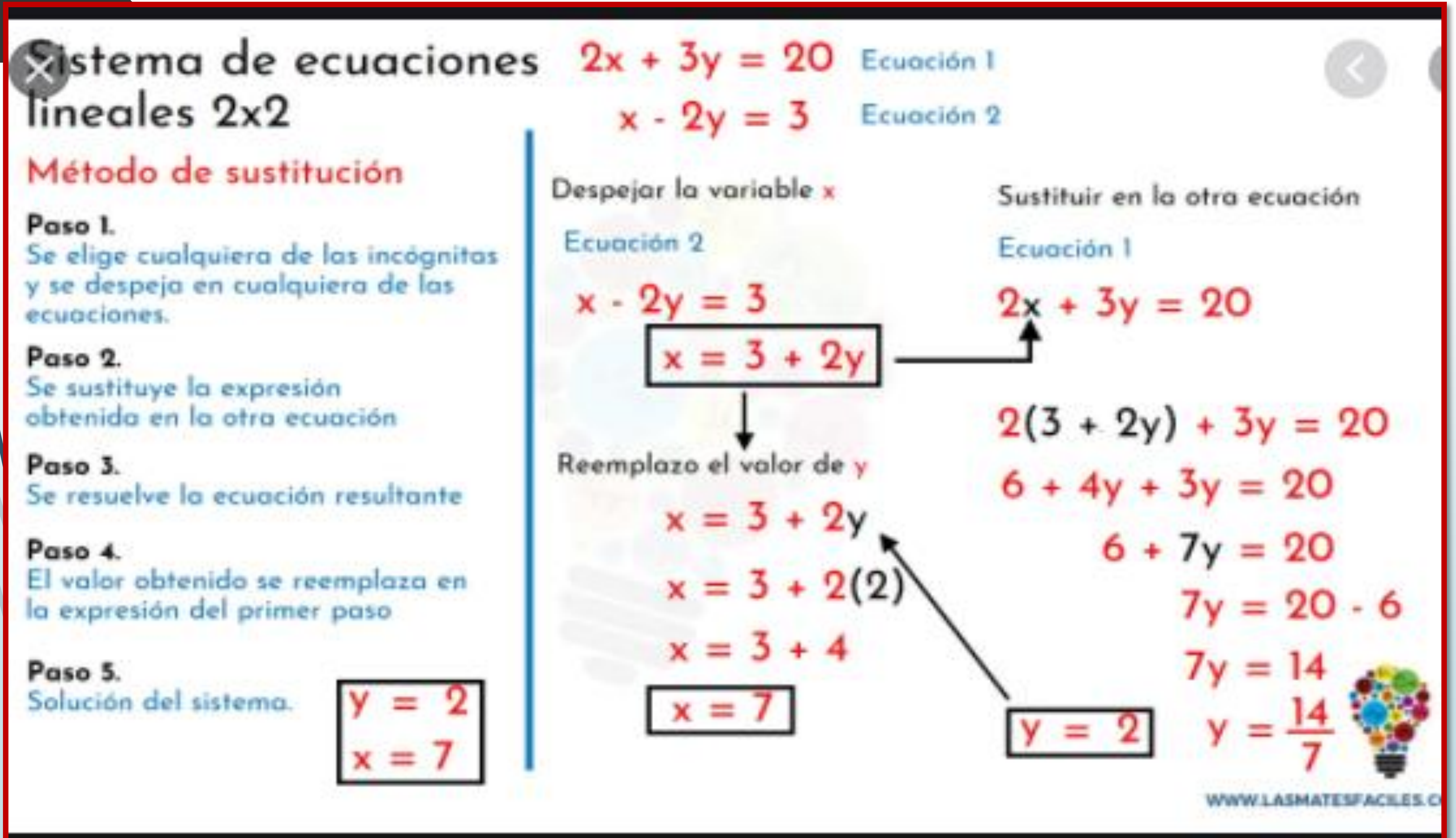
$$5(-4-5b)-3b=36$$
$$-20-25b-3b=36$$
$$-28b=36+20$$
$$-28b=56$$
$$b=\frac{56}{-28} \Rightarrow b=-2$$

Encontramos a

$$a=\frac{-4-5b}{2}=\frac{-4-5(-2)}{2}=3$$

La solucion es $a=3, b=-2$

VEAMOS EL EJEMPLO AHORA PASO A PASO POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN



EJEMPLO 3:

RESOLUCION SISTEMA DE ECUACIONES POR SUSTITUCION

$$\begin{cases} 3x + 5y = 45 \\ -4x - y = -43 \end{cases}$$

Escogemos una ecuación y despejamos una variable

$$-4x - y = -43$$
$$-y = -43 + 4x$$
$$y = -(-43 + 4x)$$
$$y = 43 - 4x$$

Reemplazamos la variable en la Otra ecuación

$$3x + 5y = 45$$
$$3x + 5(43 - 4x) = 45$$
$$3x + 215 - 20x = 45$$
$$-17x = -215 + 45$$
$$-17x = -170$$
$$x = \frac{-170}{-17}$$
$$x = 10$$

Finalmente reemplazamos la x en una de las dos ecuaciones para obtener la y

$$-4x - y = -43$$
$$-4 * 10 - y = -43$$
$$-40 - y = -43$$
$$-y = -43 + 40$$
$$-y = -3$$
$$y = 3$$

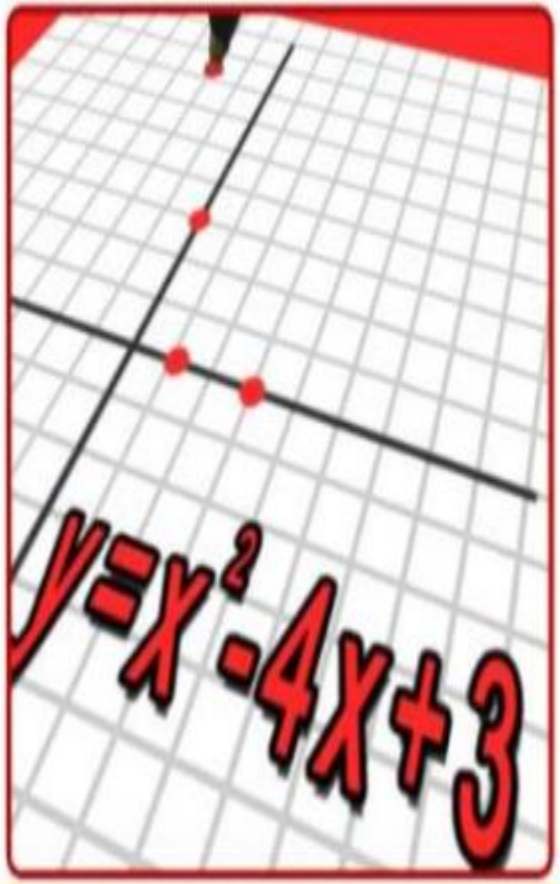
Conjunto Solución.

$$x = 10, \qquad y = 3$$

3. MÉTODO DE ELIMINACIÓN O REDUCCIÓN

MÉTODO POR REDUCCIÓN

- 1 Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.
- 2 La restamos, y desaparece una de las incógnitas.
- 3 Se resuelve la ecuación resultante.
- 4 El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.
- 5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema



$$\begin{array}{lrl} * & 5x - 2y = 11 & \\ ** & x + 3y = 9 & /\cdot -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} * & 5x - 2y = 11 \\ ** & -5x - 15y = -45 \\ \hline & 0 - 17y = -34 \\ & -17y = -34 \ /\cdot -1 \end{array}$$

$$y = \frac{34}{17}$$

$$y = 2$$

Reemplazamos y= 2 en *

$$* \ 5x - 2y = 11$$
$$5x - 2(2) = 11$$
$$5x = 11 + 4$$
$$5x = 15$$
$$x = \frac{15}{5}$$
$$x = 3$$

$\therefore$ El punto de intersección es P (3,2)

VEAMOS EL EJEMPLO AHORA PASO A PASO POR EL MÉTODO DE ELIMINACIÓN

Sistema de ecuaciones lineales 2x2

Método de eliminación o reducción

Paso 1.
Se preparan las ecuaciones multiplicándolas por los números que convenga.

Paso 2.
Sumamos ambas ecuaciones

Paso 3.
Se resuelve la ecuación resultante

Paso 4.
El valor obtenido se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

Paso 5.
Solución del sistema.

$$\boxed{\begin{array}{l} y = 2 \\ x = 7 \end{array}}$$

$\boxed{2x} + 3y = 20$ Ecuación 1

$x - 2y = 3$ Ecuación 2

Para convertir x en -2x debo multiplicarlo por -2

Multiplico la Ecuación 2 por -2

$$x - 2y = 3$$

$$(-2) \quad (x - 2y = 3)$$

$-2x + 4y = -6$ Ecuación 2n

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 20 \\ -2x + 4y = -6 \\ \hline 0 + 7y = 14 \end{array}$$

$$y = \frac{14}{7}$$

$$\boxed{y = 2}$$

Reemplazo en Ecuación 1

$$x - 2y = 3$$

$$x - 2(2) = 3$$

$$x - 4 = 3$$

$$x = 3 + 4$$

$$\boxed{x = 7}$$

WWW.LASMATESFACILES.COM

EJEMPLO 3:

SOLUCION SISTEMA DE ECUACIONES REDUCCION

$$\begin{cases} 5x - 10y = 25 \\ 8x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5x - 10y &= 25 \\ 8x + 2y &= 4 \quad * 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x - 10y &= 25 \\ 40x + 10y &= 20 \end{aligned}$$

Sumamos las dos ecuaciones

$45x = 45$

$$x = \frac{45}{45}$$

$$x = 1$$

Para obtener la variable y :

Reemplazamos la x en una de las ecuaciones.

$$5x - 10y = 25$$

$$\mathbf{5 * 1 - 10y = 25}$$

$$5 - 10y = 25$$

$$-10y = 25 - 5$$

$$-10y = 20$$

$$y = \frac{20}{-10} = -2$$

4. METODO DE DETERMINANTES

1. **Se emplea este método cuando las ecuaciones del sistema poseen coeficientes, vamos a considerar el siguiente sistema:**

$$a_1x_1 + b_1x_2 = c_1$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$$

2. En este caso se trabaja con determinantes de la forma (2 x 2), esto se determina porque hay dos elementos en las filas y dos elementos en las columnas.

3. El resultado se alcanza con una multiplicación cruzada: al primer producto se le resta el segundo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

4. Con esto se obtiene la solución al sistema mediante la relación:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4 \cdot 1 - 1 \cdot 5}{2 \cdot 1 - 1 \cdot 3} = \frac{4-5}{2-3} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 5 - 4 \cdot 3}{-1} = \frac{10-12}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Ejemplo:

Utilice determinantes para resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2+20}{1+10} = \frac{22}{11} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4-4}{1+10} = \frac{0}{11} = 0$$

Por lo tanto la solución es (2, 0).

VEAMOS EL EJEMPLO AHORA PASO A PASO POR EL MÉTODO DE DETERMINANTES

Sistema de ecuaciones lineales 2x2

Método de determinantes o regla de Cramer

Paso 1.
Se prepara la matriz de los coeficientes y se halla el determinante

Paso 2.
Se prepara la matriz de la incógnita x y se halla el determinante

Paso 3.
Se prepara la matriz de la incógnita y y se halla el determinante

Paso 4.
Hallamos el valor de las incógnitas

Paso 5.
Solución del sistema.

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x + 3y \\ x - 2y \end{array}} \begin{array}{l} = 20 \\ = 3 \end{array}$$

Ecuación 1

Ecuación 2

Matriz 2x2.
Dos filas y dos columnas

Determinante:

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Matriz de los coeficientes.

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} |M| = (2)(-2) - (3)(1) \\ |M| = -4 - 3 = -7 \end{array}$$

$$M_x = \begin{bmatrix} 20 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} |M_x| = (20)(-2) - (3)(3) \\ |M_x| = -40 - 9 = -49 \end{array}$$

$$M_y = \begin{bmatrix} 2 & 20 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} |M_y| = (2)(3) - (20)(1) \\ |M_y| = 6 - 20 = -14 \end{array}$$

$$y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{-49}{-7} = 7$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = 2 \\ x = 7 \end{array}}$$

WWW.LASMATESFACILES.COM

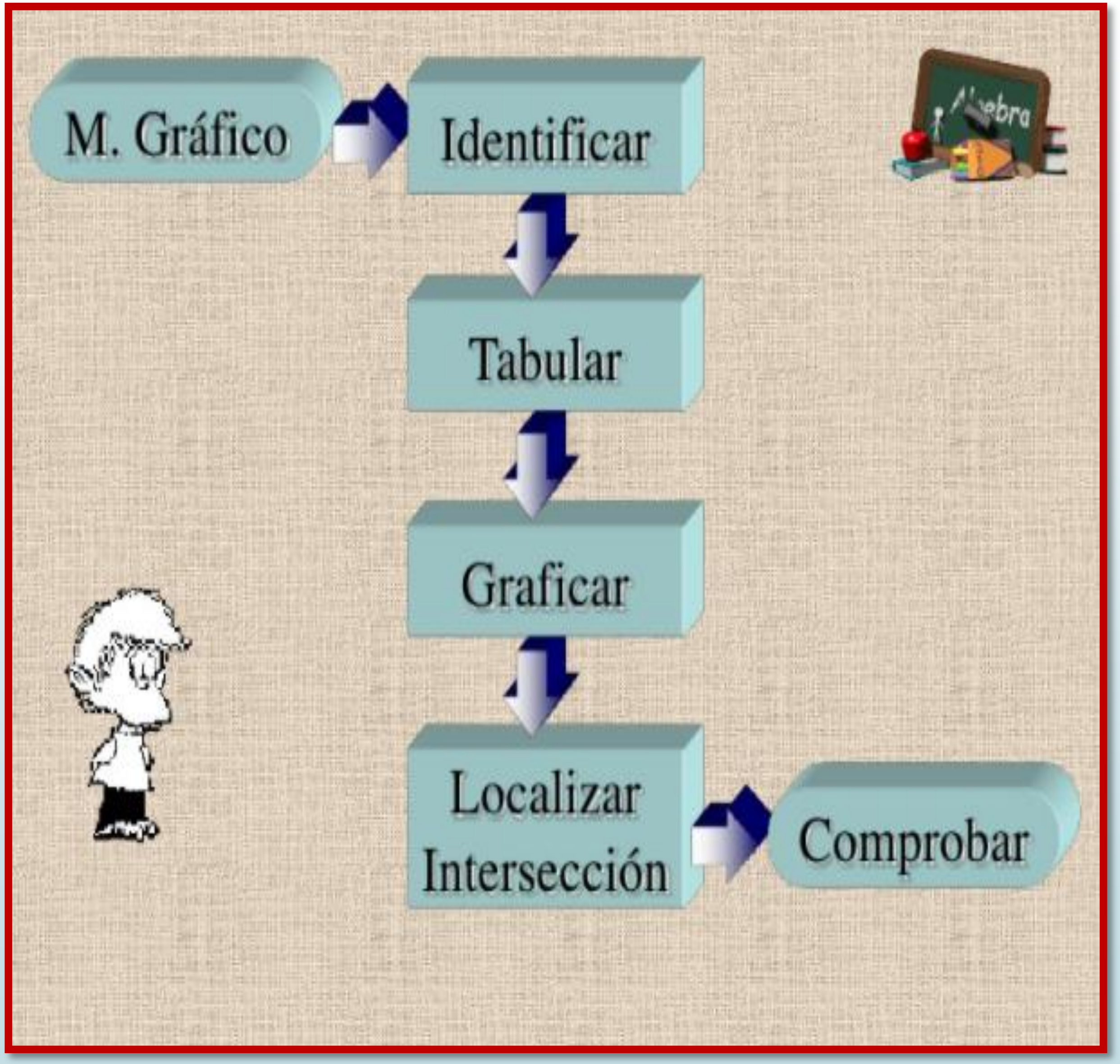
5. METODO GRAFICO

Método Gráfico

Como su nombre lo indica, el método consiste en trazar las gráficas de las dos rectas correspondientes a las ecuaciones lineales del sistema.

Luego debemos localizar el punto de intersección de dichas rectas; sus coordenadas son la solución del sistema.

A continuación explicamos el procedimiento



1 Identificar

Este paso consiste en darle un número a cada ecuación, cualquiera de ellas puede ser considerada la ecuación uno y la otra la ecuación dos.

También puede ser buena idea utilizar colores distintos para cada ecuación en todos los pasos del procedimiento.

2 Tabular

Necesitamos localizar dos puntos para trazar la gráfica correspondiente a cada ecuación. Para ello se requiere darle valores a equis o ye (al menos dos).

Frecuentemente se toman dos valores:
Cuando $x = 0$, $y = ?$
Cuando $y = 0$, $x = ?$

3 Graficar

Uniendo los dos puntos obtenidos en cada ecuación obtenemos las gráficas de dos líneas rectas.

Es importante la precisión con que se tracen las rectas para que el resultado sea más exacto.

4 Localizar Intersección

Las coordenadas del punto de intersección de las rectas son la solución del sistema de ecuaciones.

El resultado es obtenido por observación, por esto resulta tan importante ser cuidadosos en el trazo de las rectas.

EJEMPLO 1:

Resolver gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y + x = 3 \end{cases}$$

Ver solución

Lo primero que hacemos es despejar la y en ambas ecuaciones.

Primera ecuación:

$$y - 2x = 0 \rightarrow$$

$$y = 2x$$

Segunda ecuación:

$$y + x = 3 \quad \rightarrow$$

$$y = 3 - x$$

Ahora vamos a calcular unos cuantos puntos de las dos funciones para representarlas. Utilizaremos $x = 0$ y $x = 2$.

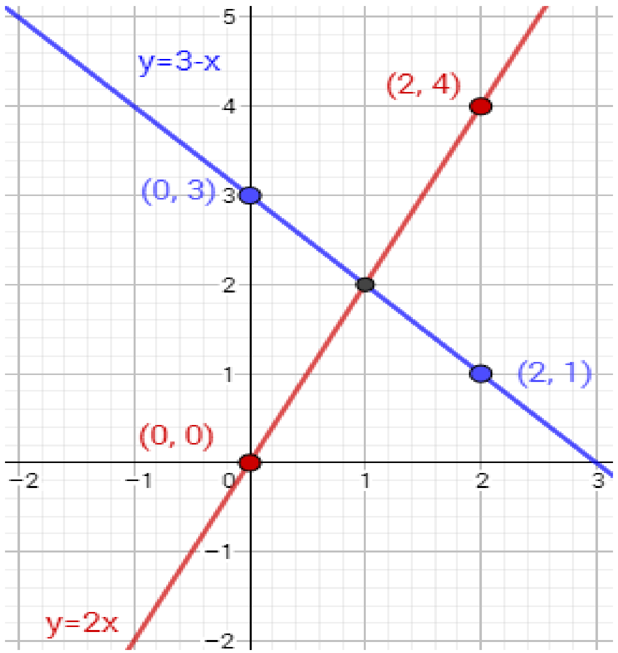
Para la primera función tenemos la tabla

x	$y = 2x$	Punto
0	0	(0,0)
2	4	(2,4)

Para la segunda función tenemos la tabla

x	$y = 3 - x$	Punto
0	3	(0,3)
2	1	(2,1)

Ahora representamos los puntos de cada tabla uniéndolos:



La solución del sistema es el punto donde las gráficas se cortan:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

EJEMPLO 2:

$$\begin{cases} 3x-y = 5 \\ y = 7-x \end{cases}$$

SISTEMA DE ECUACIONES

MÉTODO GRÁFICO

recta r

r) $3x-y = 5$

$3x = 5+y$

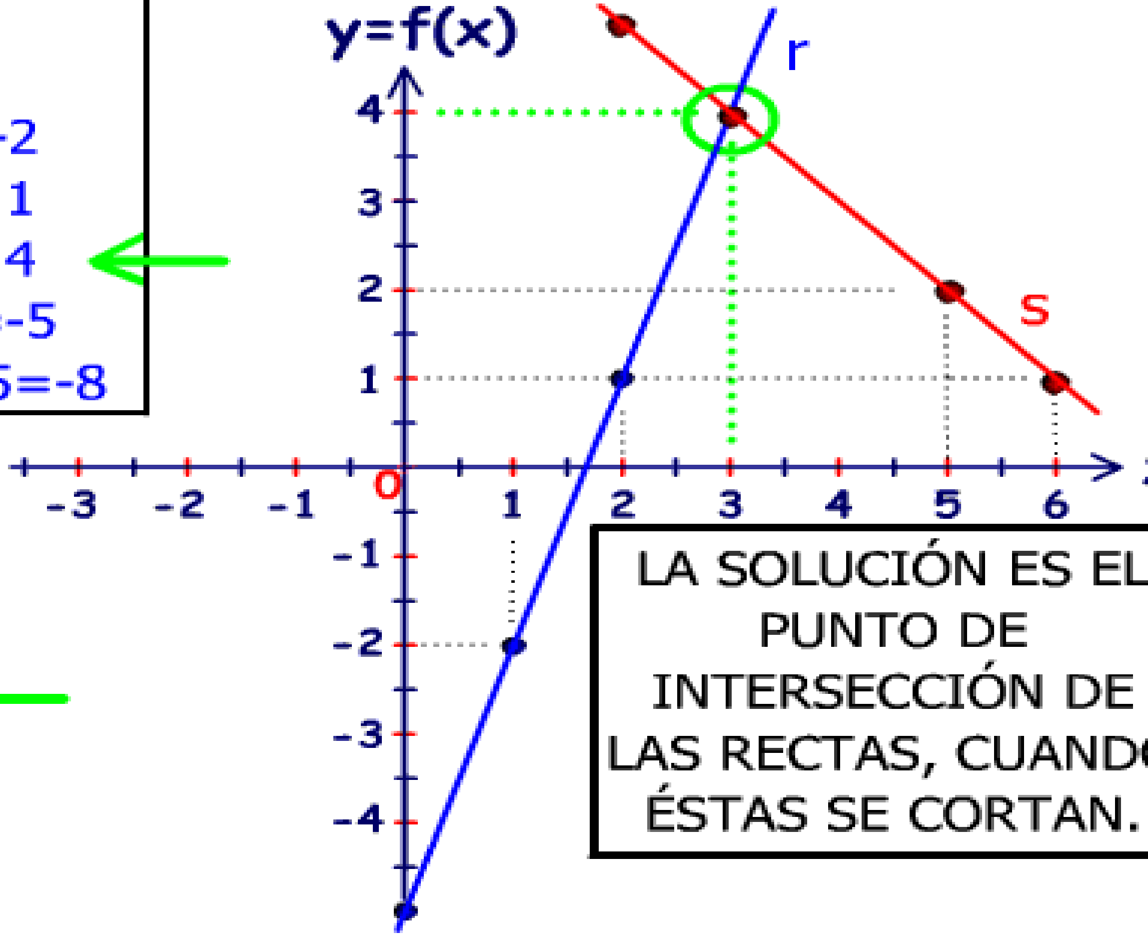
$3x-5 = y$

x	y
x	3x-5
1	3.1-5=-2
2	3.2-5= 1
3	3.3-5= 4
0	3.0-5 =-5
-1	3.(-1)-5=-8

recta s

s) $y = 7-x$

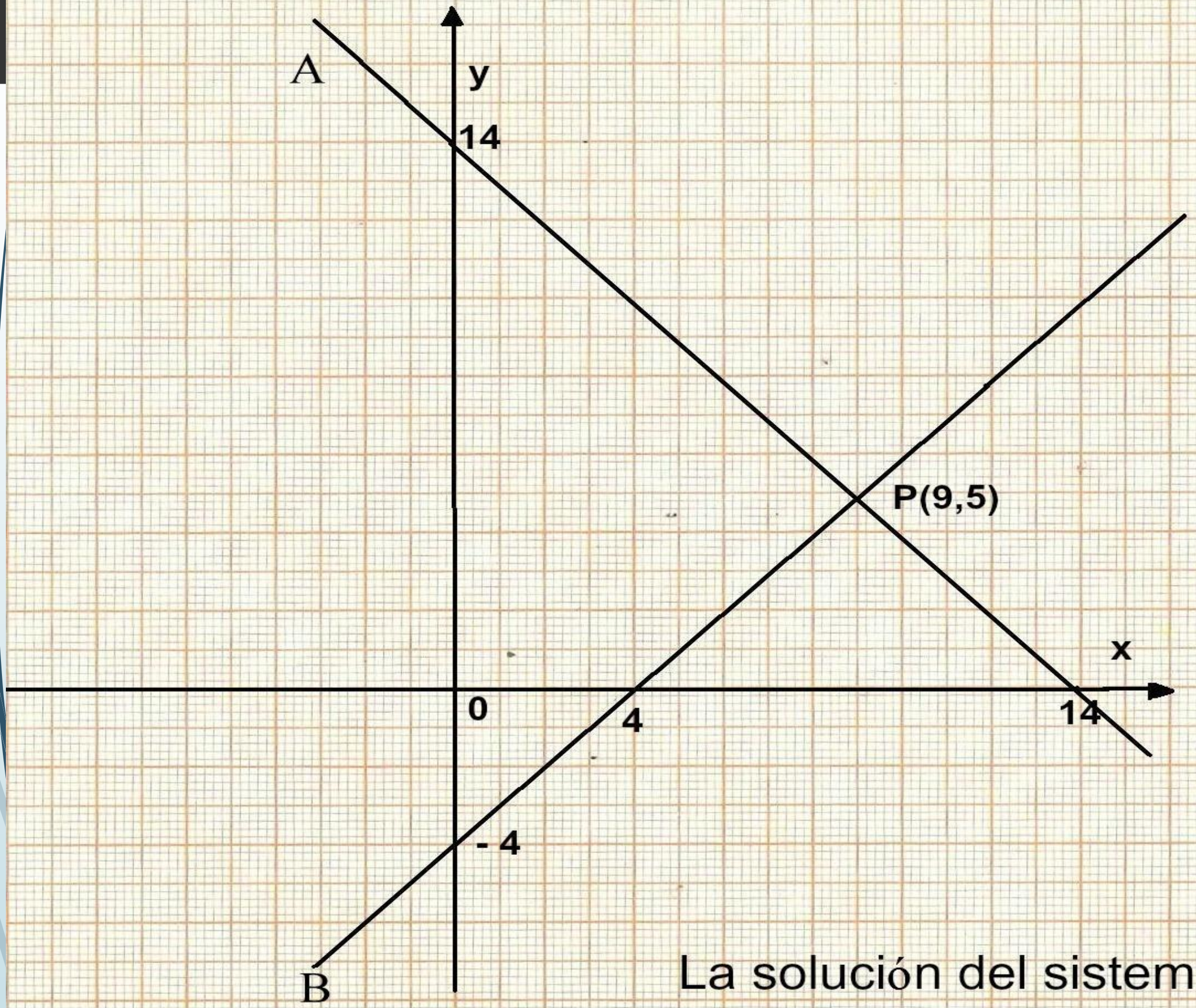
x	y
x	7-x
1	7-1= 6
2	7-2= 5
3	7-3= 4
0	7-0= 7
-1	7-(-1)= 8
5	7-5= 2
6	7-6= 1



LA SOLUCIÓN ES EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE LAS RECTAS, CUANDO ÉSTAS SE CORTAN.

Cuando x es 3, la y es 4 en ambas rectas. = En este ejemplo, la solución es el punto (3,4) = En este ejemplo, la solución es x=3, y=4

EJEMPLO 3:



Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

en la ecuación A
$x + y = 14$

x	y
0	14
14	0

en la ecuación B
$x - y = 4$

x	y
0	- 4
4	0

La solución del sistema,
la intersección de las dos rectas,
es el punto P (9, 5)