

Unidad 2

Operaciones con Números Enteros

Tema 9

Potenciación en los enteros y propiedades

Un árbol tiene 11 ramas, en cada rama hay 11 frutos y cada fruto produce 11 semillas. ¿Cuántas semillas puede dar el árbol?

Total de ramas: 11 Total de frutos: $11 \times 11 = 121$ frutos Total de semillas: $11 \times 11 \times 11 = 121 \times 11 = 1331$

El árbol puede producir 1331 semillas $\rightarrow 11 \times 11 \times 11 = 11^3 = 1331$ es un caso de potenciación.

Conceptualiza:

La potenciación es una multiplicación especial, en la que todos los factores son iguales. Si $a, n \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 0$, entonces la enésima potencia de a es:

$$a^n = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}^{n \text{ factores}}}{n \text{ factores}}$$

$$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^5 \longrightarrow (-2)^5 = 32$$

↓

La base es el factor que se repite

↓

El exponente expresa el número de veces que se multiplica la base

↓

La potencia es producto obtenido

Se pueden realizar operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de potencias. Para ello es suficiente desarrollar las potencias y luego, con los resultados, efectuar las operaciones.

Merece especial atención la multiplicación de potencias que en algunos casos cumple con unas propiedades que se analizan a continuación:

Producto de potencias que tiene la misma base

Para multiplicar potencias que tienen la misma base diferente de cero, se deja como producto la misma base, con un exponente que sea igual a la suma de los exponentes que tienen los factores.

$$3^2 \times 3^4 \times 3^3 \times 3^1 = 3^{2+4+3+1} = 3^{10} = 59049$$

$$3^2 \times 3^4 \times 3^3 \times 3^1 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{10} = 59049$$

$$a^m \times a^n = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ veces}} \times \overbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}^{n \text{ veces}}}{m \text{ veces} \times n \text{ veces}} = a^{m+n}$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \forall a, m, n \in \mathbb{Z}, a \neq 0, n \geq 0, m \geq 0$$

Cociente de potencias de igual base

Para dividir dos potencias que tiene la misma base, se deja como cociente la misma base elevada a un exponente que sea igual a la diferencia que se obtiene de restar el exponente del divisor del exponente del dividendo.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \forall a, m, n \in \mathbb{Z}, a \neq 0, n \geq 0, m \geq n$$

$$\frac{(-4)^5}{(-4)^3} = (-4)^{5-3} = (-4)^2 = (-4)(-4) = 16$$

$$\frac{(-8)^5}{(-8)^5} = (-8)^{5-5} = (-8)^0 = 1$$

En general si $a \neq 0$, entonces $a^0 = 1$

Potencia de una potencia

$$(a^m)^n = a^{m \times n} \quad a, m, n \in \mathbb{Z}, a \neq 0, m, n \geq 0$$

Para elevar una potencia a un exponente se deja como resultado la misma base con un exponente que sea el producto de los dos exponentes.

$$(-2^2)^3 = (-2)^6$$

$$-2 \times -2 \times -2 \times -2 \times -2 \times -2 = 64$$

Aplicación de estas propiedades

• Simplifica la expresión:

$$\frac{(-3 \times 5)^3 \times (-2 \times 5)^6 \times (-3 \times 5)^6}{5^9 \times (-3)^5 \times (-2)^6 \times (-3)^4 \times 5^6}$$

$$= \frac{-3^3 \times 5^3 \times -2^6 \times 5^6 \times -3^6 \times 5^6}{5^9 \times (-3)^5 \times (-2)^6 \times (-3)^4 \times 5^6}$$

$$= \frac{(-3)^9 \times (5^{15}) \times (-2)^6}{5^{15} \times (-3)^9 \times (-2)^6}$$

$$= (-3)^{9-9} \times 5^{15-15} \times (-2)^{6-6}$$

$$= (-3)^0 \times 5^0 \times (-2)^0$$

$$= 1 \times 1 \times 1 = 1$$