FUNCIONES REALES Y APLICACIONES

Gráficos

Dominio

Recorrido

Ing. Tania Aleyda Acosta Hurtado, MSc.
Ing. Nelly Patricia Acosta Vargas, MSc

E-mail: tania.acosta@epn.edu.ec
E-mail: acostanp@gmail.com

Segunda edición en español

Revisado por:

Remigio Vicente Chalán Paladínez Msc.

Paúl Esteban Méndez Silva MSc.

ISBN: 978-9942-21-780-6

Noviembre 2015

PRÓLOGO

El propósito de la segunda edición de este libro es proporcionar una guía a los estudiantes de bachillerato, como también a quienes estén inician o sus estudios en la universidad, en las diferentes carreras de ingeniería y ciencias.

Se provee de teoría, ejercicios propuestos, resueltos y de aplicación, los cuáles serán de gran ayuda para todo estudiante que se inicie sus estudios universitarios.

Con los ejercicios que se presentan en este libro se pretende que los estudiantes adquieran las competencias necesarias para aplicar los fundamentos de la matemática y funciones, en problemas de la vida real, llegando a alcanzar aprendizajes significativos.

CONTENIDO

FUNCIONES REALES Y APLICACIONES

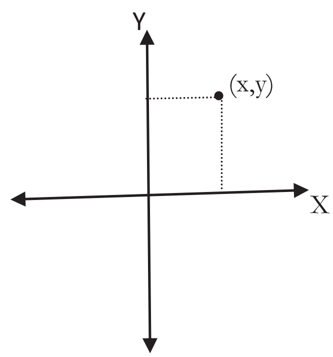
1.1 PRODUCTO CARTESIANO

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es otro conjunto (A x B) formado por pares ordenados (***x,y***) tal que la primera componente "***x***" pertenece al conjunto A ($x \in A$) ; y la segunda componente "**y**" pertenece al conjunto B ($y \in A$).

Este conjunto se nota por $A \times B$ y se lee: "A cruz B".

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

Representación gráfica del par ordenado (x,y) en el plano cartesiano:

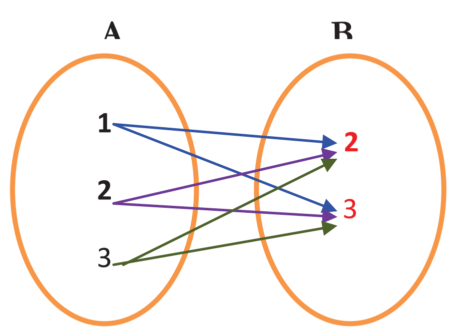


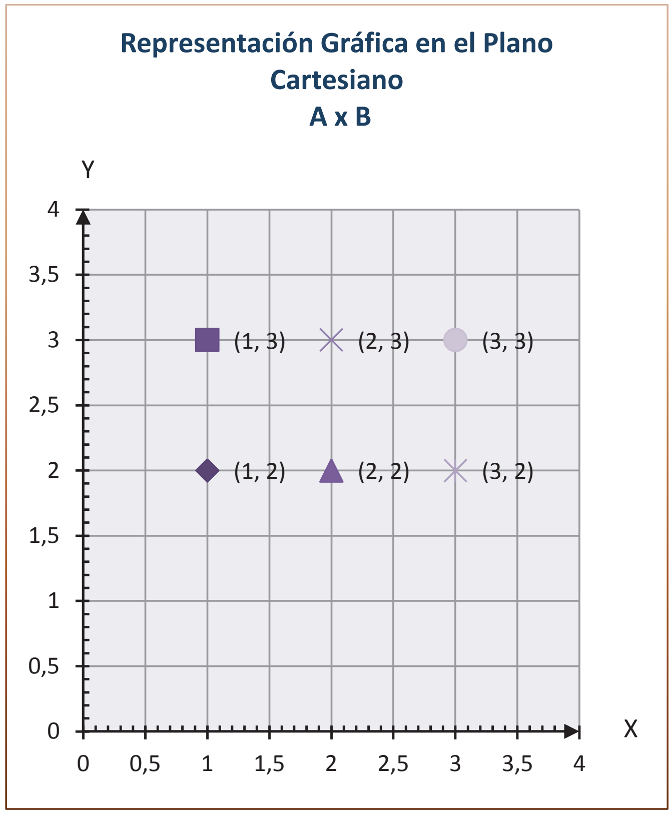
Ejemplo 1:

A= {1 , 2, 3} (3 elementos)

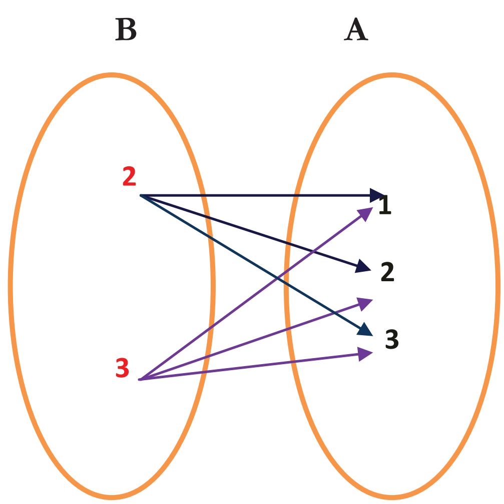
B = { 2 , 3 } (2 elementos)

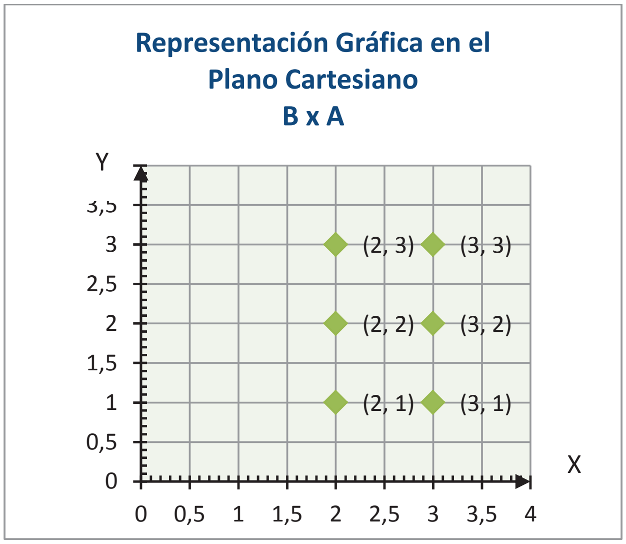
A x B= {(1,2), (1,3) , (2,2) ,(2,3), (3,2), (3,3)} (6 elementos)





B x A= {(2,1);(2,2); (2,3); (3,1);(3,2));(3,3)}





Ejemplo 2:

Determinar AxA Si: A= {1, 2, 3}

A= {1, 2, 3} x A= {1, 2, 3}

AxA= {(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 1); (3, 2); (3, 3)}

Ejemplo 3:

Si A= {-1, 2, -3} y B= {3, 4, 5, 6}, Determinar AxB y BxA

AxB= {(-1, 3); (-1, 4); (-1, 5); (-1, 6); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (-3, 3); (-3, 4); (-3, 5); (-3, 6)}

BxA= {(3, -1); (3, 2); (3,-3); (4, -1); (4, 2); (4, -3); (5,- 1); (5, 2); (5, -3); (6, -1); (6, 2); (6, -3)}

Ejemplo 4:

Si A= {b, c, d}

Hallar: AxA.

AxA= {(b, b); (b, c); (b, d); (c, b); (c, c); (c, d); (d, b); (d, c); (d, d)}

Propiedades:

$\forall$ A, B conjuntos finitos, se cumple que:

1.- A x B ≠ B x A (El producto cartesiano no es conmutativo)

2.- A x (B x C) ≠ (A x B) x C (El producto cartesiano no cumple la propiedad Asociativa)

$3.-A=\emptyset \text{ v } B=\emptyset \rightarrow A \times B=\emptyset$

Ejercicios

1. Sean los conjuntos: $A=\{1,,3,4,5\}, B=\{7,8,9\}$

   Hallar:

   a) $A \times B$

   b) $B \times A$

   c) $B x B$

   d) $A x A$

1.2 RELACIÓN

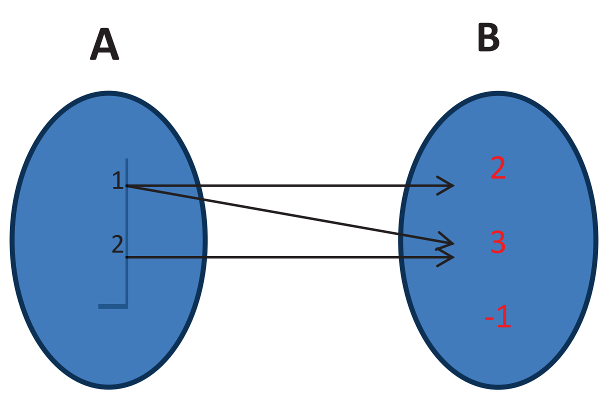
Es un subconjunto no vacío del producto cartesiano A x B,

Ejemplo: Sean los conjunto A= {1 , 2 } y B = { 2 , 3, -1 }

La relación R_1 formada por los pares ordenados (x, y), subconjunto del producto cartesiano A x B, donde **x es menor que y,** es la siguiente:

$$R_1=\{(x, y) \in A \times B / x < y]$$

$$R_1=[(1, 2); (1, 3); (2, 3)]$$



1.3 FUNCIÓN

Es un subconjunto del producto cartesiano A x B (relación), tal que se cumplen las siguientes condiciones.

1.- $\forall$ x $\in$ A, $\exists$ y $\in$ B tal que (x, y) $\in$ f

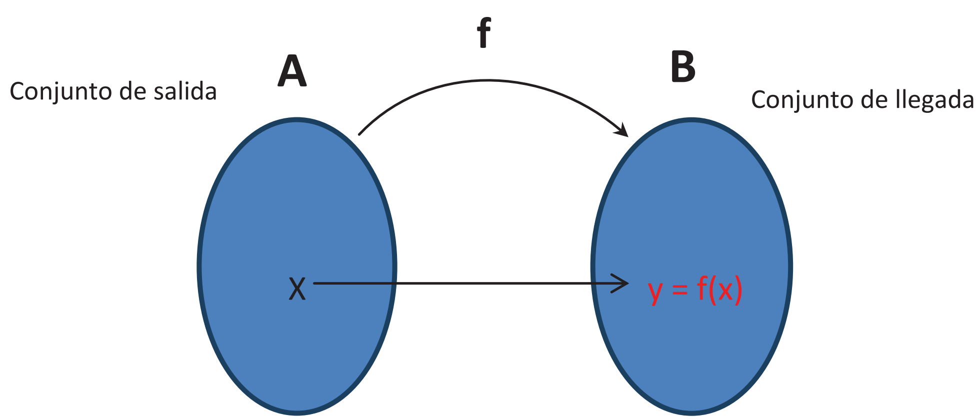
2.- Si (x, y) y (x, z) $\in$ f $\rightarrow$ y = z

Es decir que :

- Todo elemento del conjunto de salida, debe tener una imagen en elemento del conjunto de llegada.
- No puede existir dos pares ordenados con la misma primera componente y la segunda componente distinta.

Notación:

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$



x es la variable independiente

y es la variable dependiente

y es la imagen de x por la ley f

1.3.1. DOMINIO

Sea la función: $f: A \rightarrow B$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

El dominio de una función **f**, es el conjunto formado por todos los **x** ∈ **A,** tal que existe un y ∈ **B**, donde **y = f(x)**

$$D_f = \{ x \in A \,/\, (x, y) \in f \}$$

1.3.2 RECORRIDO O RANGO

Es el conjunto formado por todos los **y** ∈ **B**, que son imágenes de **x** ∈ **A,** por la ley f**.**

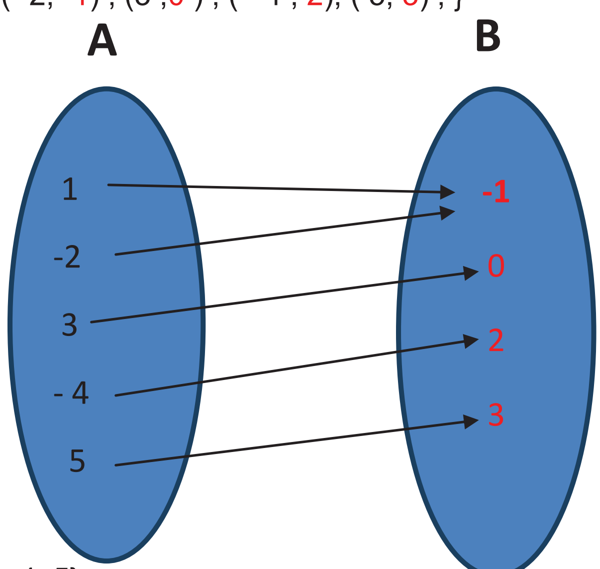
$$R_f = \{ y \in B \,/\, y = f(x) \wedge x \in A \}$$

Ejemplo de funciones:

a)

A= {1, - 2, 3, - 4, 5} y B = {-1 , 0, 2 , 3 }

f = { (1, -1) , (- 2, -1) , (3 ,0) , (- 4 , 2), (5, 3) , }

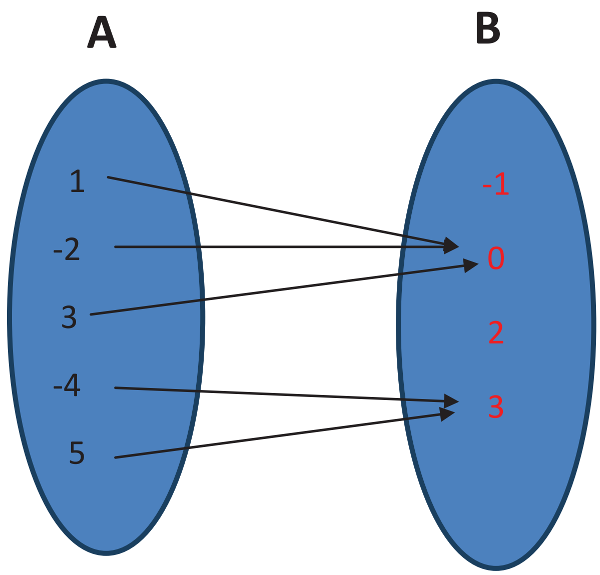


$D_f = \{ 1, -2, 3, -4, 5\}$

$R_f = \{ -1, 0, 2, 3\}$

b) A= {1, - 2, 3, - 4, 5} y B = {-1 , 0, 2 , 3 }

f = { (1, 0) , (- 2, 0) , (3 ,0) , (- 4 , 3), (5, 3) , }



D_f= { 1, -2, 3, -4, 5}

R_f= { 0, 3}

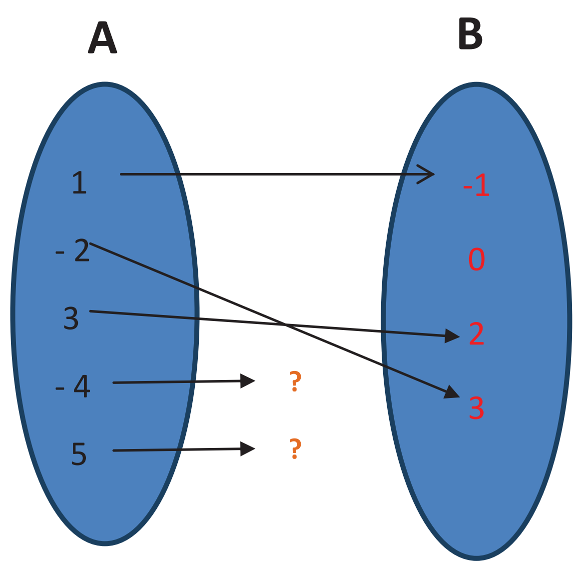
Ejemplo de relaciones que no son funciones:

a) Dados los siguientes conjuntos:

A= {1, - 2, 3, - 4, 5}

B = {-1 , 0, 2 , 3 }

f = {(1, -1); (-2, 3); (3, 2)}



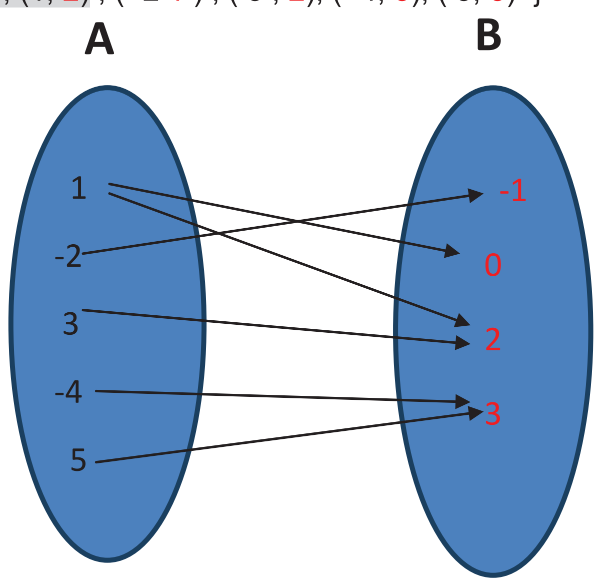
f no es función.

No cumple que “para todo **x** elemento del conjunto de salida **A,** existe una imagen **y** elemento del conjunto de llegada **B”**

b) Dados los siguientes conjuntos:

A= {1, - 2, 3, - 4, 5} y B = {-1 , 0, 2 , 3 }

f = { (1, 0) , (1, 2) , (- 2 1) , (3 , 2), (-4, 3), (5, 3) }



La relación f no es función, ya que no cumple que la siguiente condición:

$$(x, y) = (x, z) \rightarrow y = z$$

Ya que existen 2 pares ordenados donde la primera componente es igual, pero las segundas componentes son diferentes :

$$(1, 0) = (1, 2) \rightarrow 0 \neq 2$$

c) Dados los siguientes conjuntos:

A= {1, - 2, 3, - 4, 5} y B = {-1 , 0, 2 , 3 }

La relación f = {(- 2, 3); (3, 0); (- 4, 0); (- 4, 3); (5, 3)} ¿es una función?

Solución:

La relación f no es función. No cumple con ninguna de las dos condiciones para ser una función.

1.- No cumple que “para todo **x** elemento del conjunto de salida **A,** existe una imagen **y** elemento del conjunto de llegada **B”**

Al elemento “1” que pertenece al conjunto de salida no le corresponde una imagen elemento del conjunto de llegada

f(1)= ?

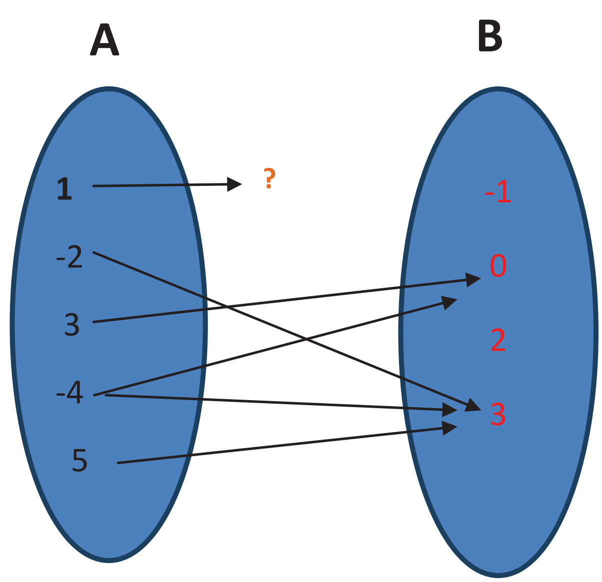
2.- No cumple que la siguiente condición:

$$(x, y) = (x, z) \rightarrow y = z$$

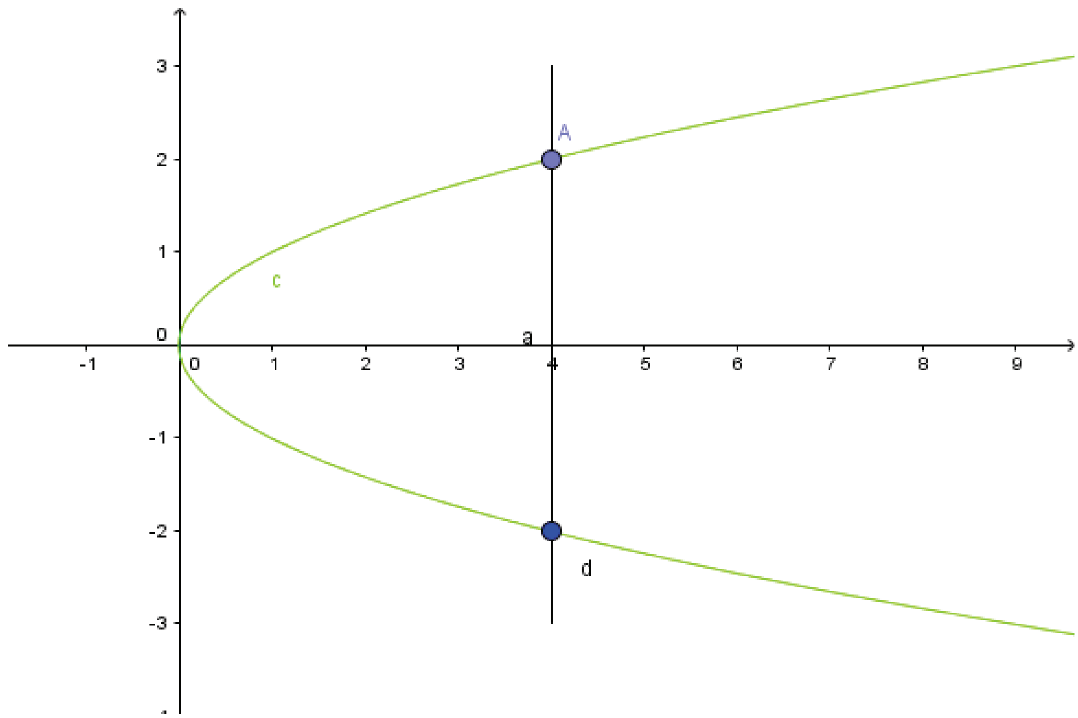
Al elemento “-4” le corresponde dos imágenes del conjunto de llegada

(- 4, 0) y (-4, 3)

0≠3



d) ¿ La siguiente gráfica, representa una función?



Solución:

No es función ya que existe un infinito número de pares ordenados donde a la primera componente “x” le corresponde 2 imágenes diferentes “y”.

Ejemplo (4, 2) y (4, -2)

$2 \neq -2$

1.3.3 TIPOS DE FUNCIONES

1.3.3.1 FUNCION CONSTANTE

Se define como:

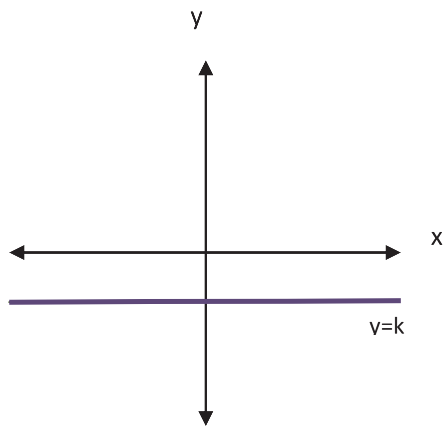
$$f = \{(x,y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \,/\, y = k\} \text{ donde } k \in \mathrm{R}$$

ó

$$f : R \rightarrow R$$

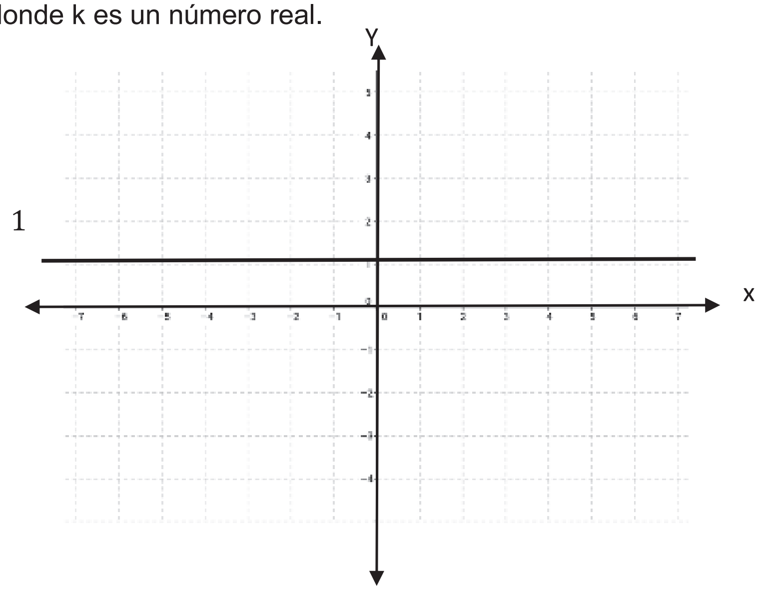
$$x \rightarrow y = k \qquad \text{donde } k \in \mathrm{R}$$

Gráficamente:



La función constante es aquella función en la que, para todos los valores de la variable independiente "x" que pertenecen al dominio de la función, la variable dependiente "y" es igual a k, donde k es un número real.

Ejemplo:



$f: R \quad \rightarrow \quad R$

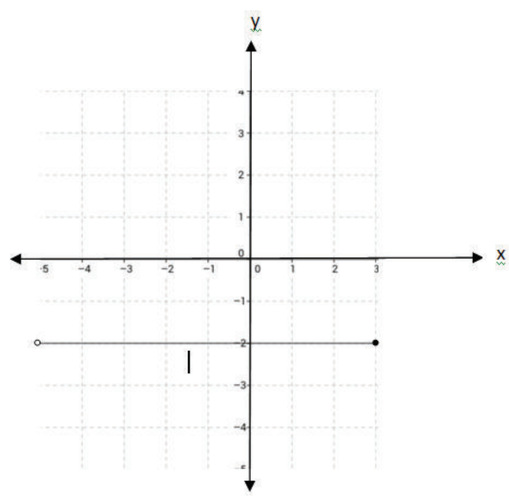
$x \quad \rightarrow \quad y = f(x) = 1$

D_f : $\forall x \in$ R

R_f:

$y = 1$

ó y ∈ $\{1\}$



a) Sea la función:

$f:]-5, 3] \quad \rightarrow \quad R$

$x \quad \rightarrow \quad y = -2$

x	Y
-5	-2
-4	-2

-3	-2
-2	-2
-1	-2
0	-2
1	-2
2	-2
3	-2

D$_f$: $\forall\, x \;\in]-5\,,3]$

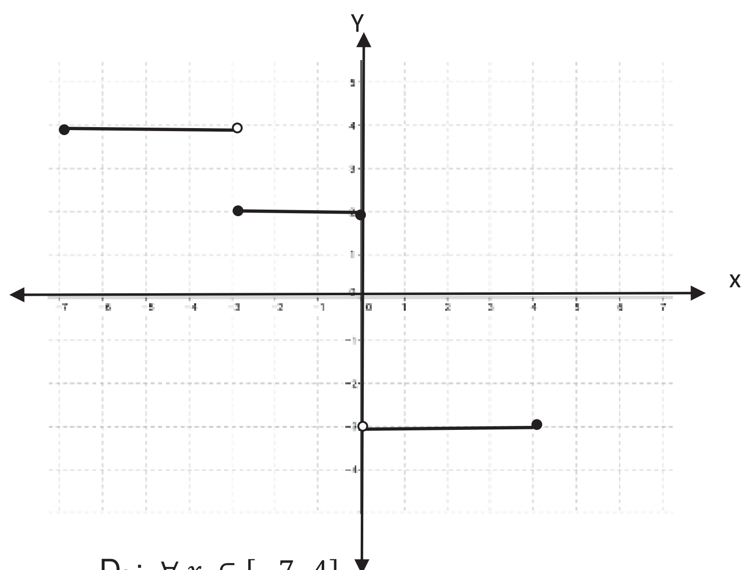
R$_f$: $y = -2$

b) Sea la función:

$$f:[-7,4] \quad \rightarrow \quad R$$

$$x \quad \rightarrow \quad y = f(x) = \begin{cases} 4 \quad si -7 \leq x < -3 \\ 2 \quad si -3 \leq x \leq 0 \\ -3 \quad si \quad 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

x	y
-7	4
-6	4
-5	4
-4	4
-3	2
-2	2
-1	2
0	2
1	-3
2	-3
3	-3
4	-3



D$_f$: $\forall\, x \;\in [-7\,,4]$

R$_f$: $y \in \{\,4, 2, -3\,\}$

d) La compañía A, ofrece a sus clientes el servicio de internet ilimitado por un pago mensual de $25. ¿ Cuál es la ecuación de la oferta?

Solución:

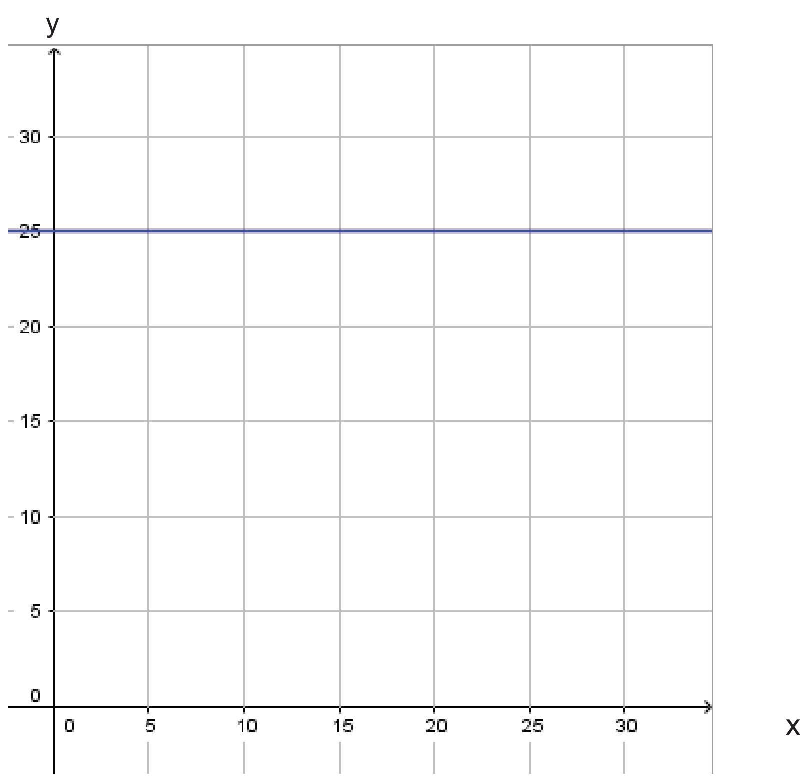
El bien que está en oferta es el tiempo de conexión a internet “x”

El precio se mantiene constante a cualquier valor del tiempo de conexión a internet. “y”

La oferta se representa como una línea horizontal con la función:

Y = 25

x	Y
5	25
10	25
15	25
20	25
25	25
25	25
30	25
35	25
40	25



1.3.3.2 FUNCIÓN LINEAL

Se define como:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = f(x) = ax + b$$

con a, b $\in \mathbb{R}$, a $\neq 0$

a es la pendiente

Ejemplos:

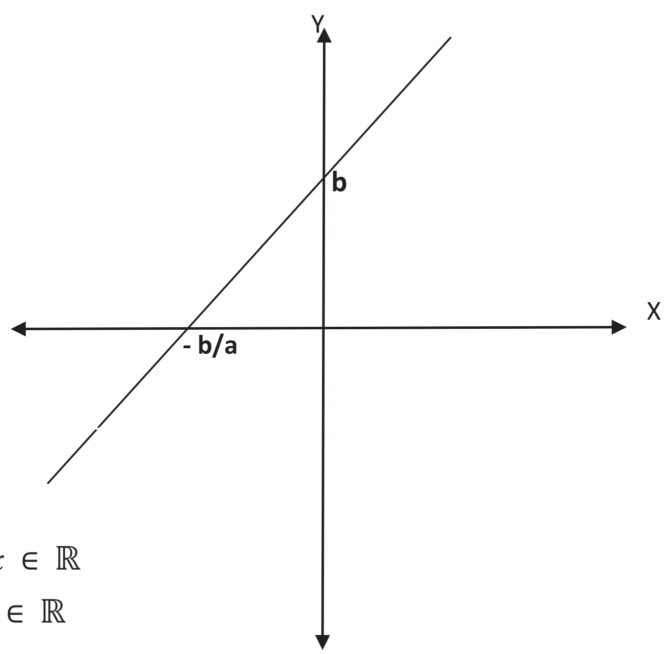
$y = x + 1$

$y = 2x + 1$

$y = -5x + 4$

$y = -3x$

I) Si a > 0 la función es creciente.



D_f : $\forall x \in \mathbb{R}$

R_f: $\forall y \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

a) Sea la función: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow y = 2x + 8$$

a = 2

b = 8

El valor de la variable x, donde la variable y = 0 es la siguiente:

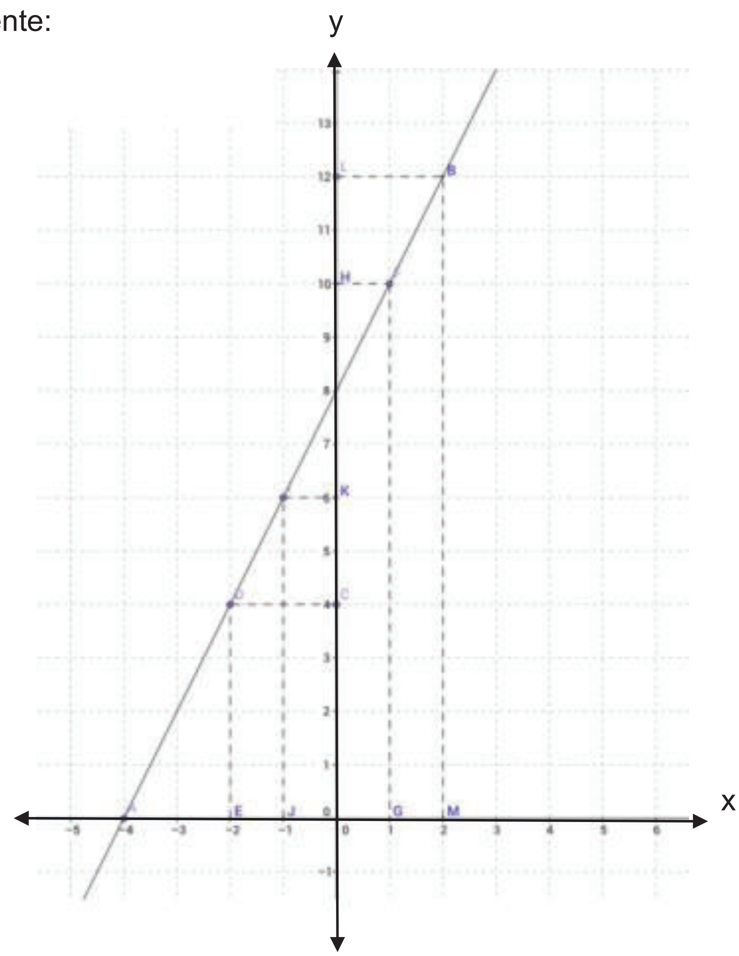
$$\frac{-b}{a} = \frac{-8}{2} = -4$$

Entonces tenemos el par ordenado (-4, 0)

El valor de la variable y, donde la variable x = 0, es y=b:

Entonces tenemos el par ordenado (0, 8)

Gráficamente:



$y = 2x + 8$

$Df: \forall x \in \mathbb{R}$

Para hallar el recorrido de f

$x \in \mathbb{R}$

$2x \in \mathbb{R}$

$2x + 8 \in \mathbb{R}$

$y \in \mathbb{R}$

$Rf: \forall y \in \mathbb{R}$

b) Sea la función: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to y = x + 3$$

a = 1 b = 3

El valor de la variable x, donde la variable y = 0 es la siguiente:

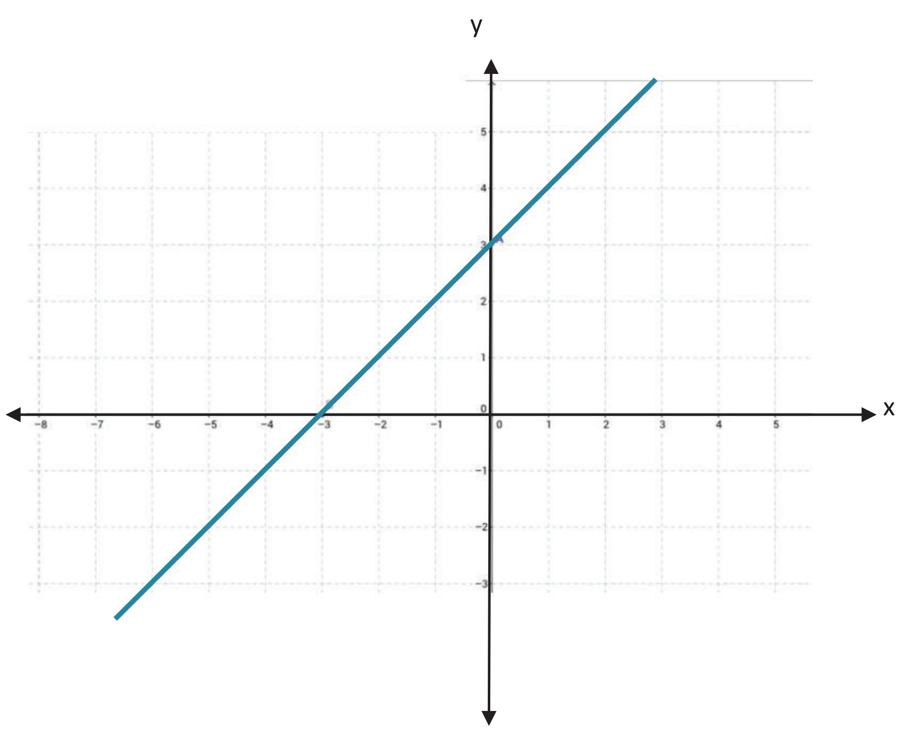
$$\frac{-b}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

Entonces tenemos el par ordenado (-3, 0)

El valor de la variable y, donde la variable x = 0, es y=b:

Entonces tenemos el par ordenado (0, 3)

Gráficamente:



c) Sea la función:

$f:]-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow y = 4x-8$

X	Y
-2	-16
2	0

a = 4

b = - 8

El valor de la variable x, donde la variable y = 0 es la siguiente:

$\frac{-b}{a} = \frac{8}{4} = 2$

Entonces tenemos el par ordenado (2, 0)

El valor de la variable y, donde la variable x = 0, es y=b:

Entonces tenemos el par ordenado (0, - 8)

Df: $\forall\, x \in]-2,2]$

Para hallar el recorrido de f

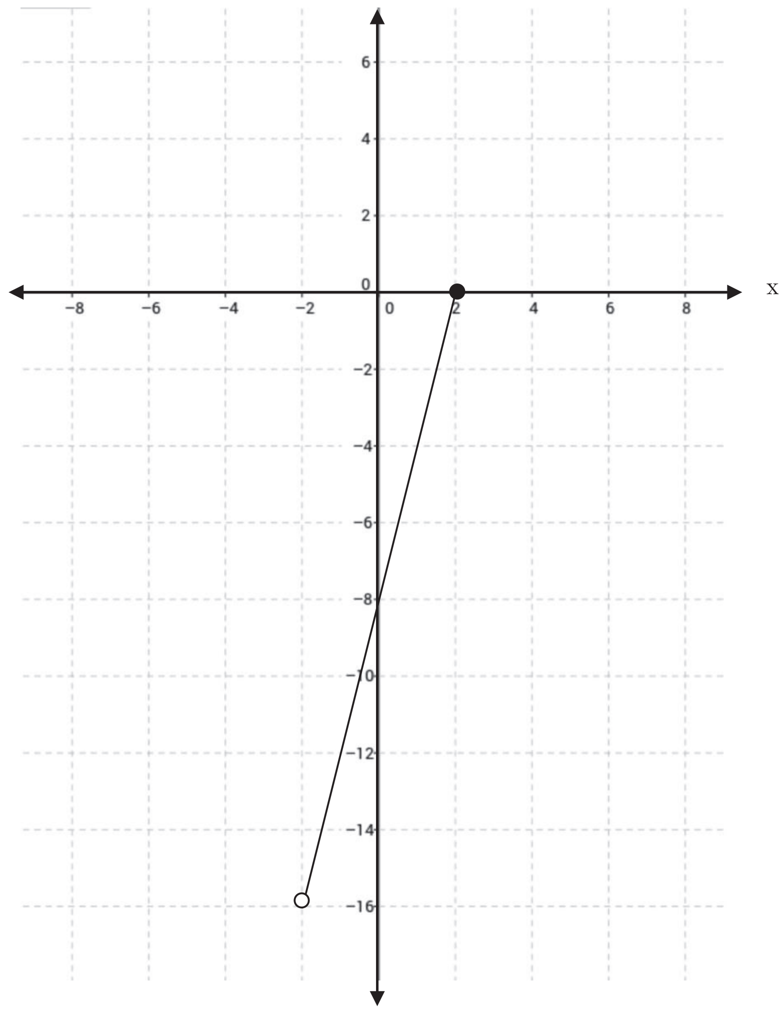
$$-2 < x \leq 2$$

$-8 < 4x \leq 8$

$-16 < 4x - 8 \leq 0$

$Rf: \forall\, y \in\ ]-16, 0]$

Gráficamente:



d) Sea la función:

f:]-4,1[$\rightarrow \mathbb{R}$

x → y = 2 x + 3

X	Y
-4	-5
1	5

a = 2

b = 3

El valor de la variable x, donde la variable y = 0 es la siguiente:

$$\frac{-b}{a} = \frac{-3}{2}$$

Entonces tenemos el par ordenado ($-\frac{3}{2}$, 0)

El valor de la variable y, donde la variable x = 0, es y=b:

Entonces tenemos el par ordenado (0, 3)

Df: $\forall\, x \in\,]-4, 1[$

Para hallar el recorrido de f

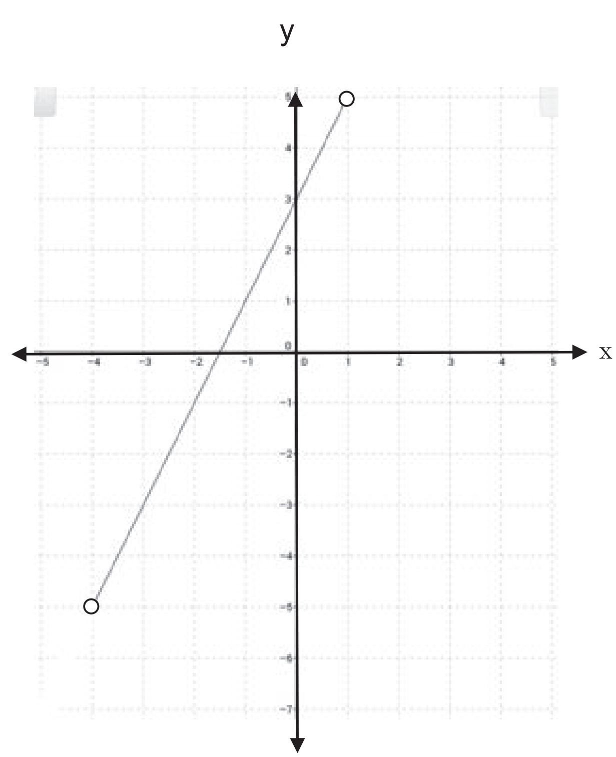
$-4 < x < 1$

$-\ 8 < 2x < 2$

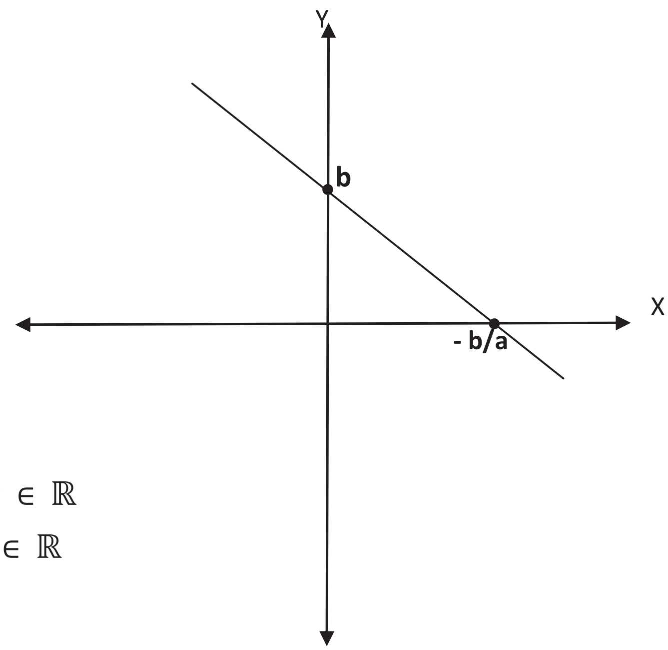
$-5 < 2x + 3 < 5$

$Rf: \forall\, y \in\ ]-5,\ 5[$

Gráficamente:



II) Si $a < 0$ la función es decreciente.



D_f : $\forall x \in \mathbb{R}$

R_f: $\forall y \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

a) Sea la función:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow y = f(x) = -2x + 6$

a= -2
b= 6

El valor de x donde la variable y=0 es la siguiente:

$\frac{-b}{a} = \frac{-6}{-2} = 3$

Entonces tenemos el par ordenado (3, 0)

El valor de la variable y, donde la variable x = 0, es y=b:

Entonces tenemos el par ordenado (0, 6)

$Df: \forall x \in \mathbb{R}$

Para hallar el recorrido de f

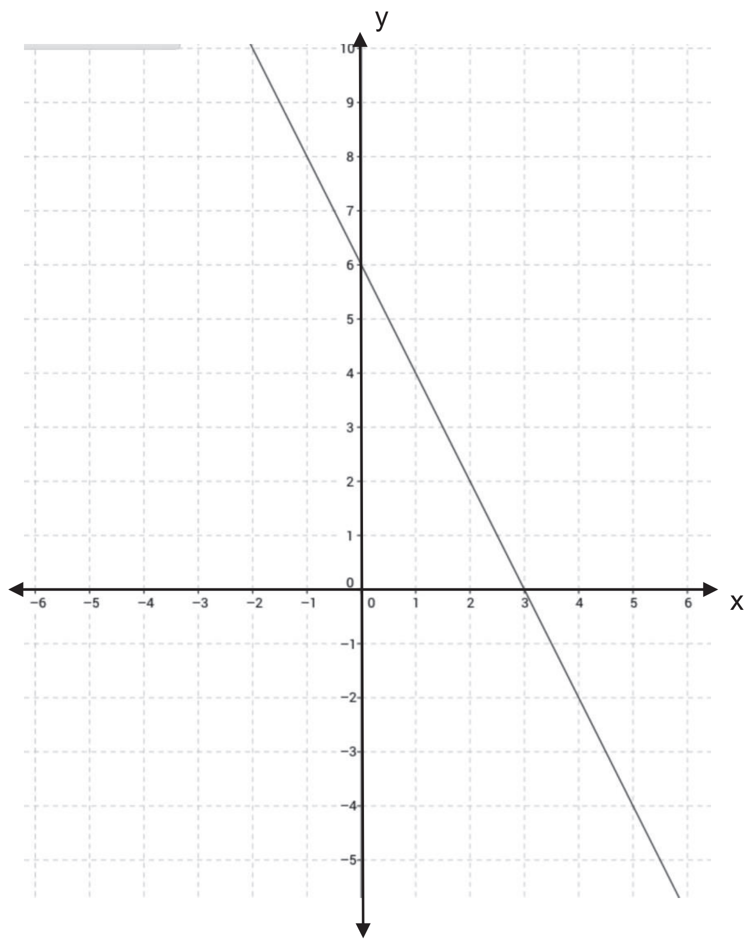
$x \in \mathbb{R}$

$-2x \in \mathbb{R}$

$-2x + 6 \in \mathbb{R}$

$y \in \mathbb{R}$

$Rf: \forall y \in \mathbb{R}$



b) Sea la función:

$f: [-4, 3[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow y = -2x - 1$$

a= - 2
b= - 1

El valor de x donde la variable y=0 es la siguiente:

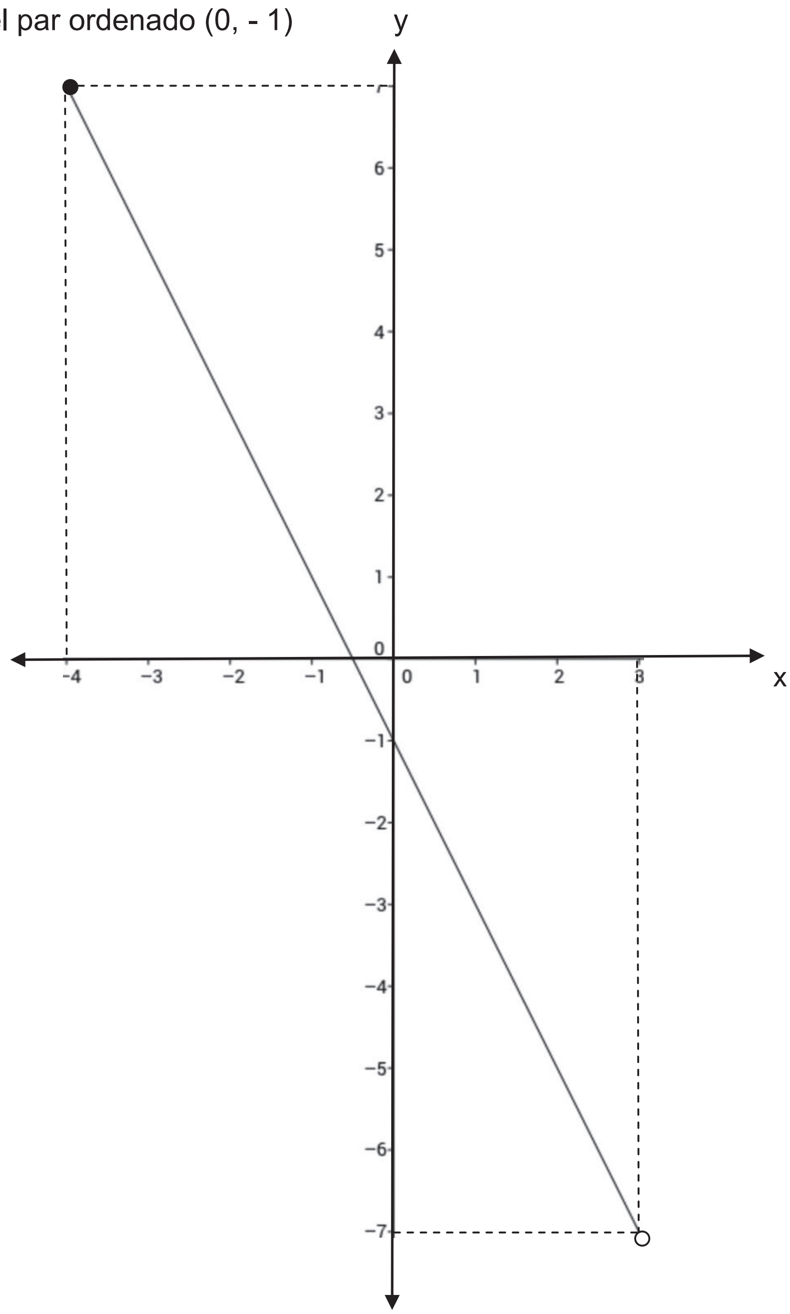
$$\frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Entonces tenemos el par ordenado $(-\frac{1}{2}, 0)$

El valor de la variable y, donde la variable x = 0, es y=b:

Entonces tenemos el par ordenado (0, - 1)

Gráficamente



$Df: \forall x \in [-4, 3[$

$R_{f:}$

$-4 \leq x < 3$

$-8 \leq 2x < 6$

$8 \geq 2x \geq\ -6$

$7 \geq -2x - 1 > -7$

$7 \geq y > -7$

$-7 < y \leq 7$

$Rf: \forall y\ \ \in]-7, 7]$

c) Sea la función:

$f: [-3, 2[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow y = -x + 5$

a= - 1
b= 5

El valor de x donde la variable y=0 es la siguiente:

$$\frac{-b}{a} = \frac{-5}{-1} = 5$$

Entonces tenemos el par ordenado (5, 0)

El valor de la variable y, donde la variable x = 0, es y=b:

Entonces tenemos el par ordenado (0, 5)

$\boldsymbol{Df}: \forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{-3}, \mathbf{2}[$

$R_{f:}$

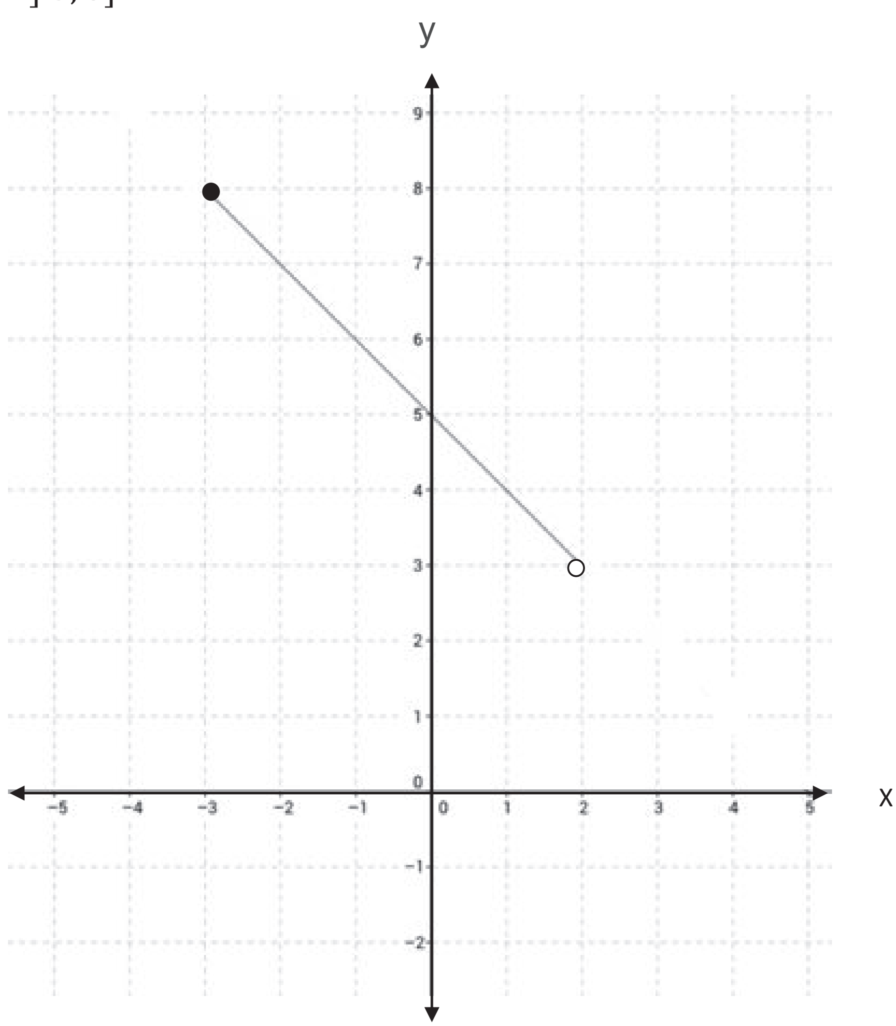
$-3 \leq x < 2$

$3 \geq -x > -2$

$8 \geq -x + 5 > 3$

$8 \geq y > 3$

$\boldsymbol{Rf}: \forall \boldsymbol{y} \in] \mathbf{3}, \mathbf{8}]$



1.3.3.2.1.- Ecuación de recta a partir de 2 puntos

Se puede determinar la ecuación de una recta, si se conoce dos coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) a través de la siguiente fórmula.

$$\frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_1})}{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1})} = \frac{(\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})}{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})}$$

Siendo la pendiente $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$

entonces:

$$(y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_1}) = \boldsymbol{m}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1})$$

donde **m** es la pendiente.

Ejemplo:

a) Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos:
   A= (2, 1) y B= (4, 5)

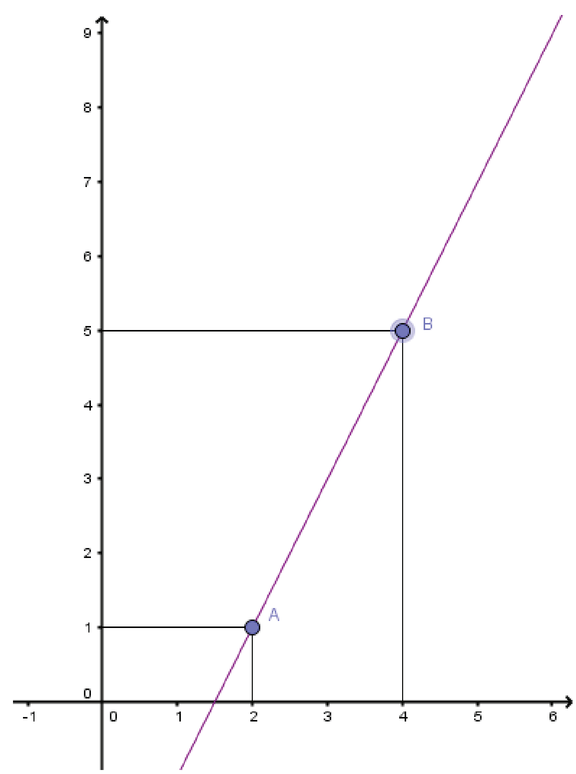
$$(y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

$$(y - 1) = \frac{(5 - 1)}{(4 - 2)}(x - 2)$$

$$(y - 1) = \frac{4}{2}(x - 2)$$

$$y - 1 = 2x - 4$$

$$y = 2x - 3$$



b) Un fábrica de pantalones tiene una demanda semanal de 500 pantalones cuando el precio es de \$60, y de 300 pantalones cuando el precio es de 80. Determine la ecuación de la demanda de pantalones, suponiendo que es una función lineal.

A= (60, 500) y B= (80, 300)

$$(y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

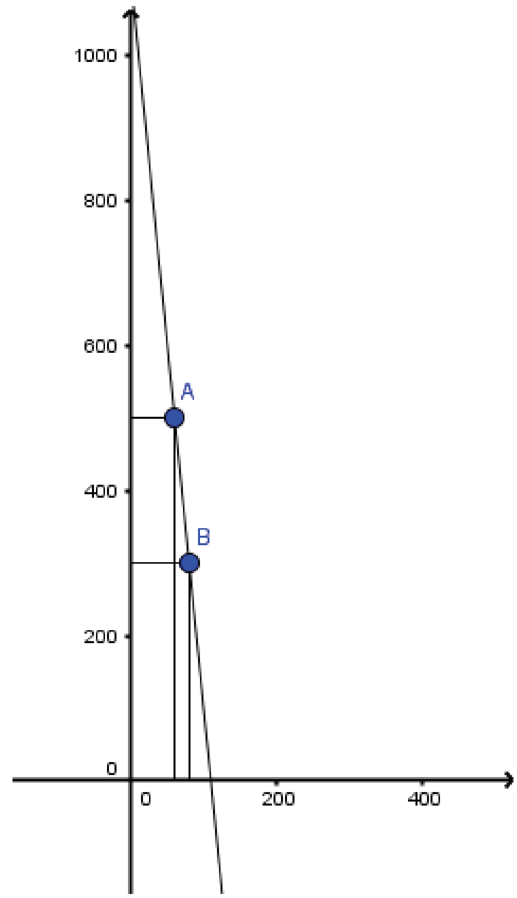
$$(y - 500) = \frac{(300 - 500)}{(80 - 60)}(x - 60)$$

$$(y - 500) = \frac{-200}{20}(x - 60)$$

$$y - 500 = -10(x - 60)$$

$$y - 500 = -10x + 600$$

$$y = -10x + 1100$$



1.3.3.2.2.- Ecuación de recta a partir la pendiente "m" y un punto.

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_1}) = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1})$$

a) Ejemplo:

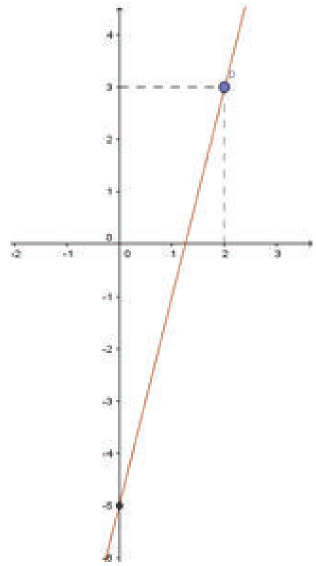
Si se conoce que la pendiente m = 4 y el punto p=(2 , 3), determinar la ecuación de la recta.

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$(y - 3) = 4(x - 2)$$

$$y - 3 = 4x - 8$$

$$y = 4x - 5$$



b) La empresa eléctrica cobra \$0.08 el kilowatio-hora (Kw-h) más un costo fijo mensual por comercialización. La factura mensual de María es \$ 18.33 por 173 Kw-h.

i) Determine la función que modele el cobro de la planilla mensual de luz.

ii) Cuánto debe pagar María si el consuno de luz es de 200 KW-h

Solución:

i)

x = la cantidad de kw-h consumidos

y= costo mensual de luz

Se conoce el par ordenado: (173, 18.33)

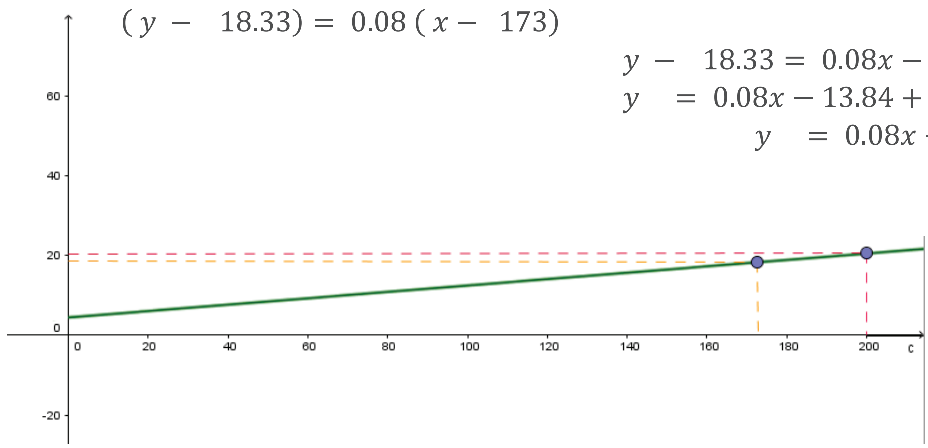
$$(y - y_1) = m\,(x - x_1)$$

$$(y - 18.33) = 0.08\,(x - 173)$$

$$y - 18.33 = 0.08x - 13.84$$

$$y = 0.08x - 13.84 + 18.33$$

$$y = 0.08x + 4.49$$



ii) Si el consumo de luz es de x= 200, María debe pagar: y = 0.08(200)+4.49

y = \$ 20,49

1.3.3.3 FUNCIÓN CUADRÁTICA

La función cuadrática de define de la siguiente manera:

f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow y = f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \qquad \textbf{donde } a \neq 0$$

I) **a > 0**

Punto mínimo (x_{min}, y_{min})

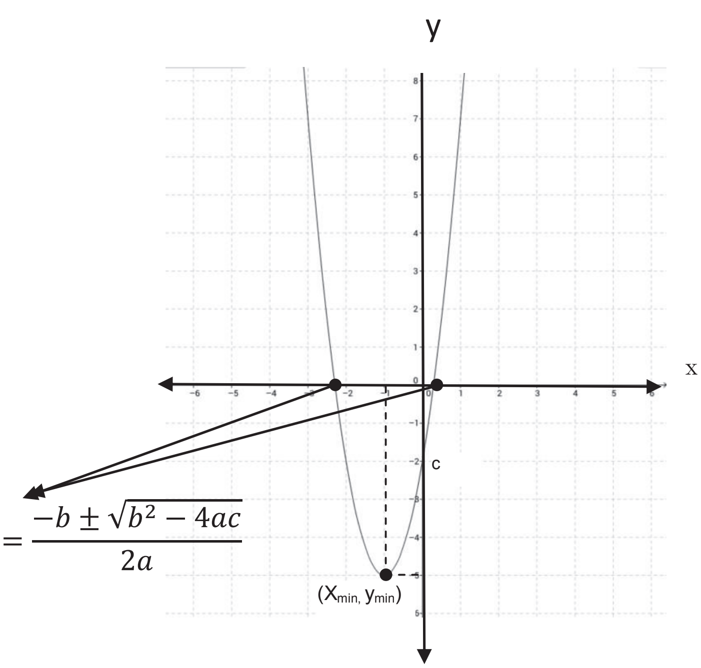
$x_{min} = \frac{-b}{2a}$

$y_{min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$

$Df: \forall x \in \mathbb{R}$

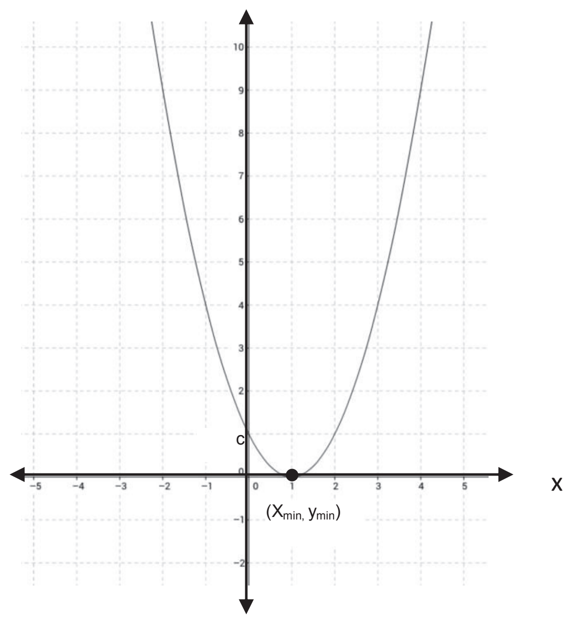
$Rf: \forall y \in [\, y_{min}, +\infty[$

$Si\ b^2 - 4ac > 0$

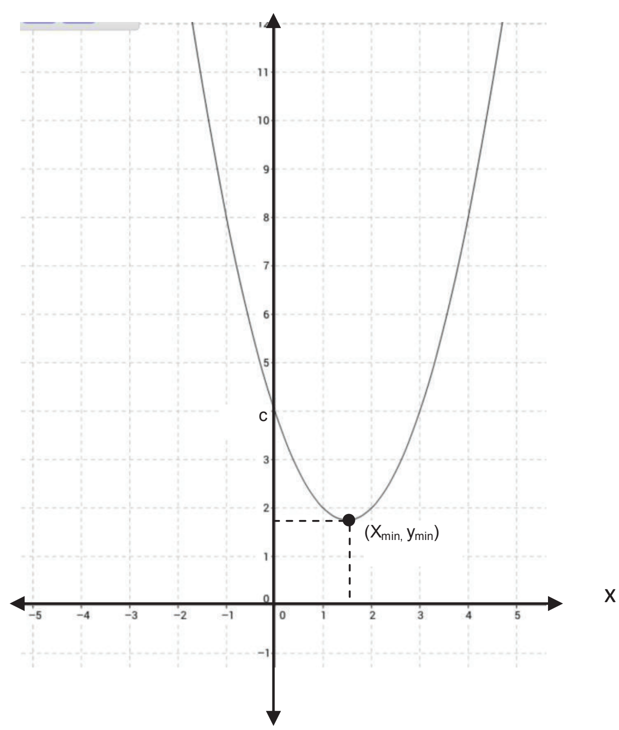


$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$Si\ b^2 - 4ac = 0$



$Si\ b^2 - 4ac < 0$



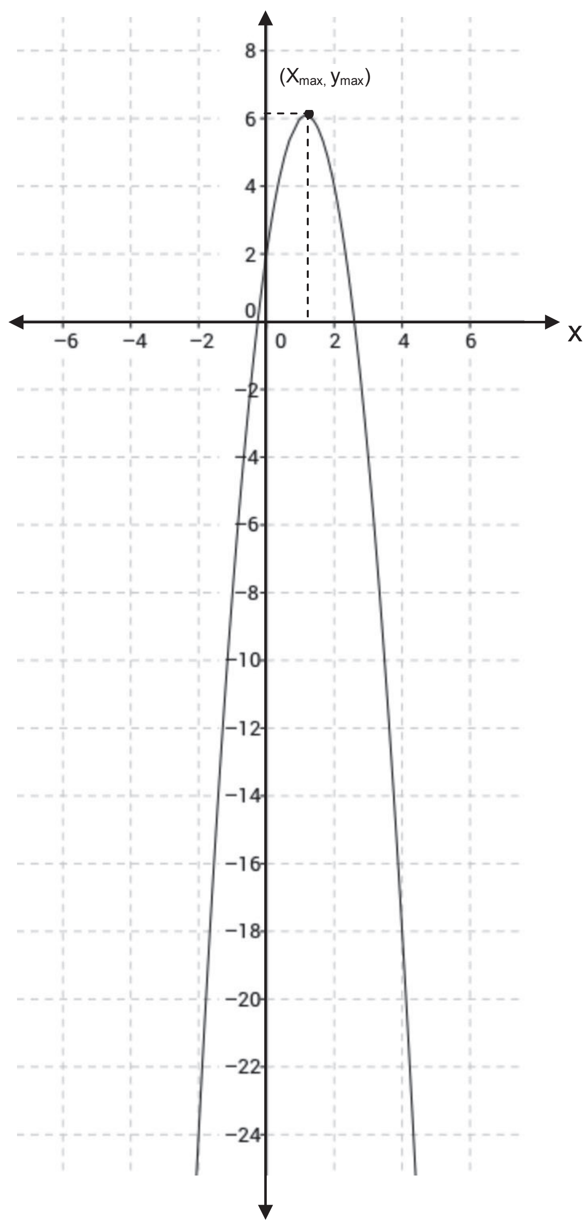
II) a < 0

Punto máximo (x_{max}, y_{max}) $x_{max} = \frac{-b}{2a}$ $y_{max} = \frac{4ac-b^2}{4a}$

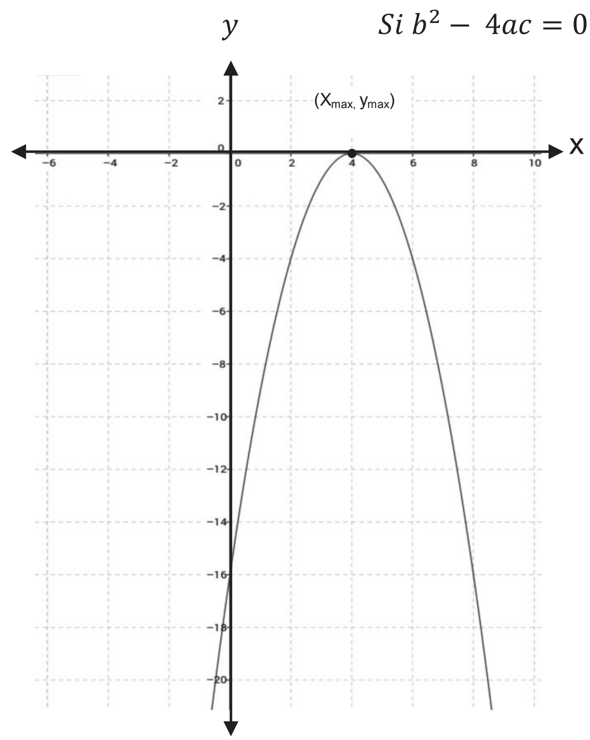
$Df: \forall x \in R$

$Rf: \forall y \in]-\infty, y_{max}]$

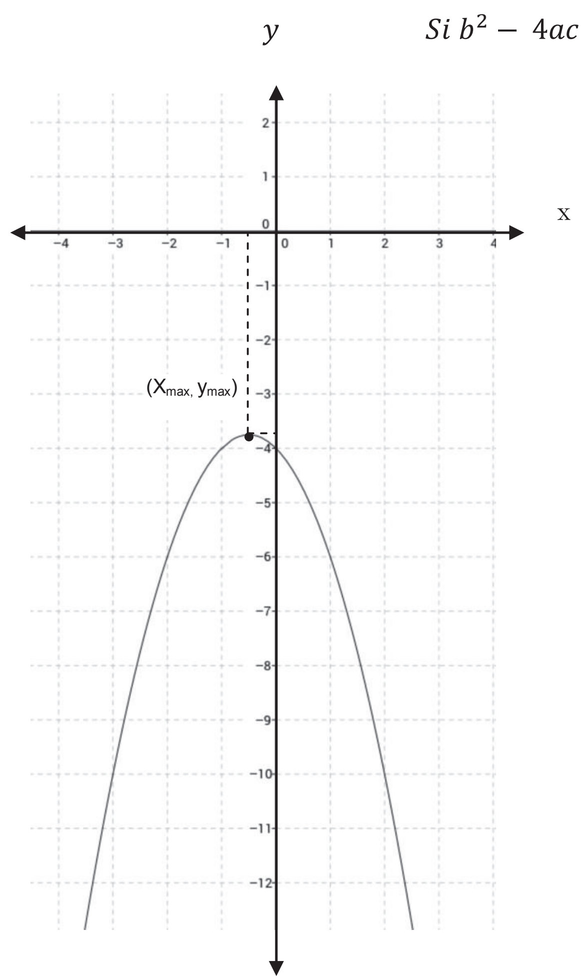
y   Si $b^2 - 4ac > 0$



$Si\ b^2 - 4ac = 0$



$Si\ b^2 - 4ac < 0$



Ejemplos:

a) Sea la función:

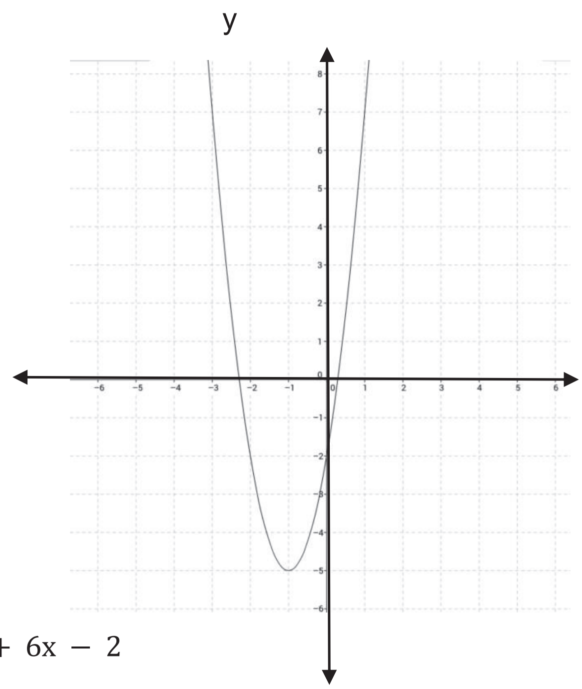
f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

x $\rightarrow$ y=f(x) = $3x^2 + 6x - 2$

a = 3
b = 6
c = - 2

$x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(3)} = -1$

$y_{min} = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(3)(-2)-6^2}{4(3)} = \frac{-60}{12} = -5$



Punto mínimo $(-1, -5)$

$Dominio\ de\ la\ función\ f$

$Df: \forall x \in \mathbb{R}$

Para hallar el recorrido de $y = 3x^2 + 6x - 2$

$y = 3(x+1)^2 - 5$

$x \in \mathbb{R}$

$x + 1 \in \mathbb{R}$

$(x+1)^2 \geq 0$

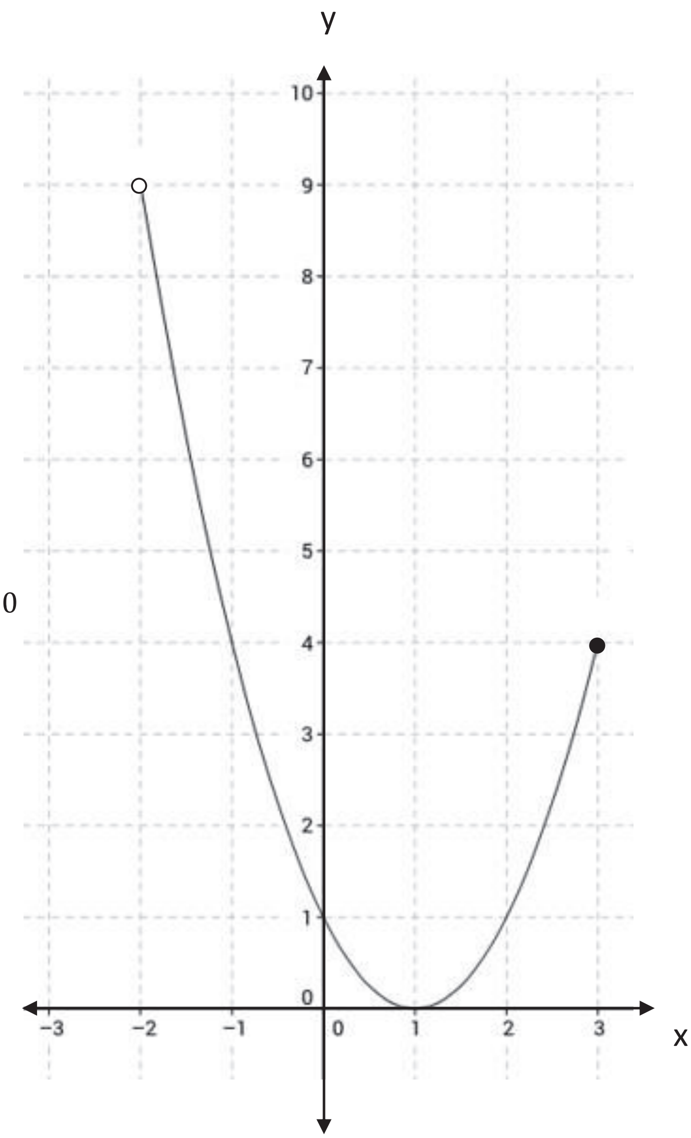
$(x+1)^2 \geq 0$

$(x+1)^2 - 5 \geq -5$

$y \geq -5$

$Rf: \forall y \in [-5, +\infty[$

b)



$f:]-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

a = 1
b = -2
c = 1

$x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$

$y_{min} = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(1)(1)-(-2)^2}{4(1)} = \frac{0}{4} = 0$

Punto mínimo $(-1,0)$

Dominio de la función f

$Df: \forall x \in]-2, 3]$

Para hallar el recorrido de la función

$y = x^2 - 2x + 1$

$y = (x - 1)^2$

Rf:

$-2 < x \leq 3$

$-3 < x - 1 \leq 2$

$0 \leq (x-1)^2 < 9$

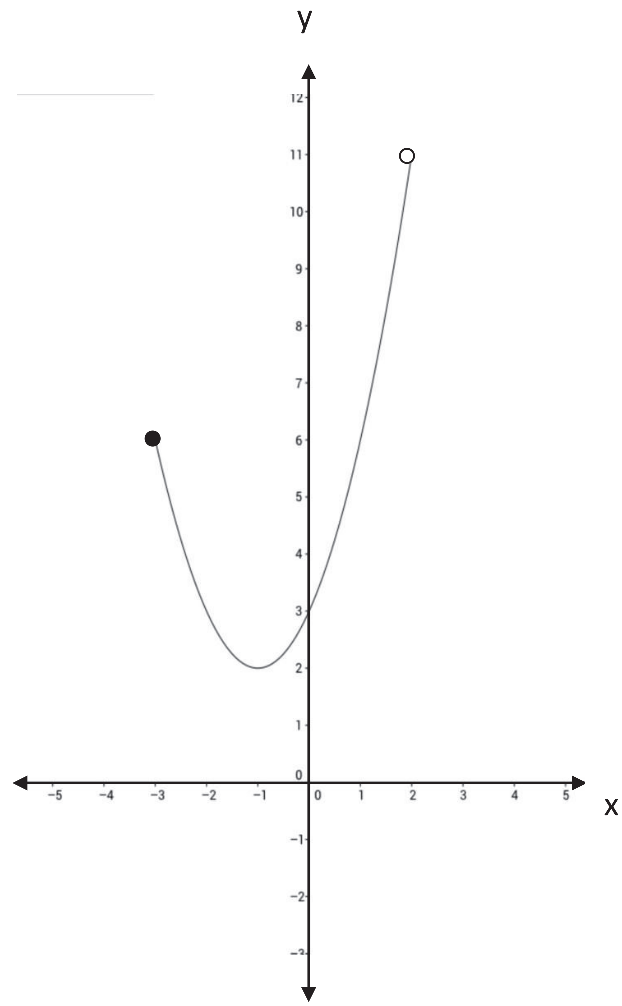
$0 \leq y < 9$

$Rf: \forall y \in [0, 9[$

d) Sea la función:

$f: [-3, 2\ [\ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow y = x^2 + 2x + 3 = (x + 1\ )^2 + 2$$



a = 1
b = 2
c = 3

x $_{min}$ = $\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = -1$

y $_{min}$= $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(1)(3)-2^2}{4(1)} = \frac{12-4}{4} = \frac{8}{4} = 2$

Punto mínimo $(-1,2)$

Dominio de la función f

$Df: \forall x \in [-3, 2[$

Para hallar el recorrido de la función

$y =\ x^2 + 2x + 2$

$\mathrm{y} =\ (x + 1\ )^2 + 2$

Rf:

$-\ 3 \leq x < 2$

$-\ 2 \leq x + 1 < 3$

$0 \leq (x + 1)^2 < 9$

$2 \leq y < 11$

$Rf: \forall y \in\ [2,\ \ 11[$

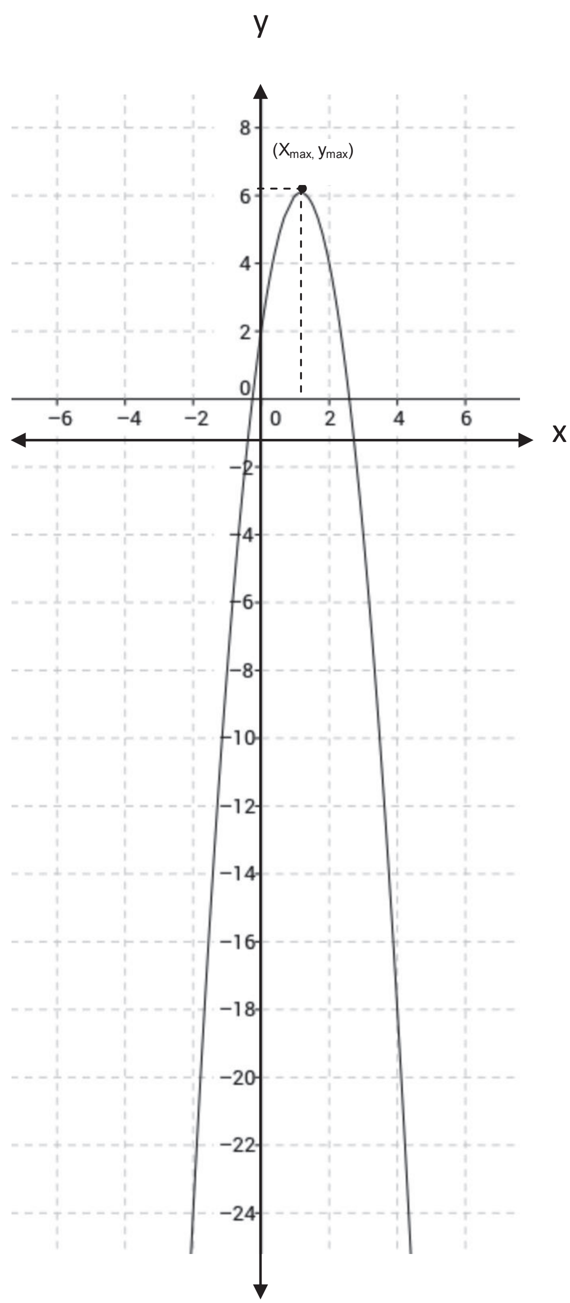
e) Sea la función:

f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow y=f(x) = -3x^2 + 7x+2$

a = -3
b = 7
c = 2

$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{2(-3)} = \frac{7}{6}$

$y_{max} = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(-3)(2)-7^2}{4(-3)} = \frac{-73}{-12} = \frac{73}{12}$



Punto máximo $\left(\frac{7}{6}, \frac{73}{12}\right)$

Dominio de la función f, Df: $\forall x \in \mathbb{R}$

Para hallar el recorrido de $y = -3x^2 + 7x + 2$

$$y = -3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{73}{12}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$x - \frac{7}{6} \in \mathbb{R}$$

$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 \geq 0$$

$$-3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 \leq 0$$

$$-3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{73}{12} \leq \frac{73}{12}$$

$$y \leq \frac{73}{12}$$

$$Rf: \forall y \in \left]-\infty, \frac{73}{12}\right]$$

f) Sea la función:

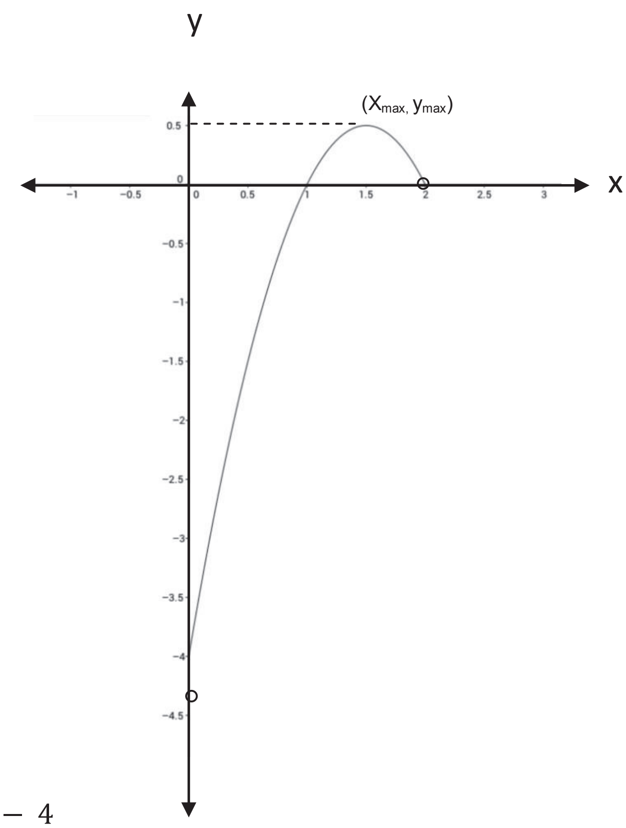
$f:]0,2[\ \rightarrow \mathbb{R}$

x $\rightarrow$ y=f(x) = $- 2x^2 + 6x - 4$

a = -2
b = 6
c = -4

$x_{\text{max}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$y_{\text{max}} = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(-2)(-4)-6^2}{4(-2)} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$



Punto máximo $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Dominio de la función f, $Df: \forall x \in]0,2[$

Para hallar el recorrido de $y = -2x^2 + 6x - 4$

$$y = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$x \in]0,2[$

$0 < x < 2$

$-\frac{3}{2} < x - \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$

$-\frac{3}{2} < x - \frac{3}{2} < 0 \quad \text{v} \quad 0 \leq x - \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$

$0 < \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{9}{4} \quad \text{v} \quad 0 \leq \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$

$0 \leq (x - \frac{3}{2})^2 < \frac{9}{4}$

$0 \geq -2(x - \frac{3}{2})^2 > -\frac{9}{2}$

$\frac{1}{2} \geq -2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2} > -\frac{8}{2}$

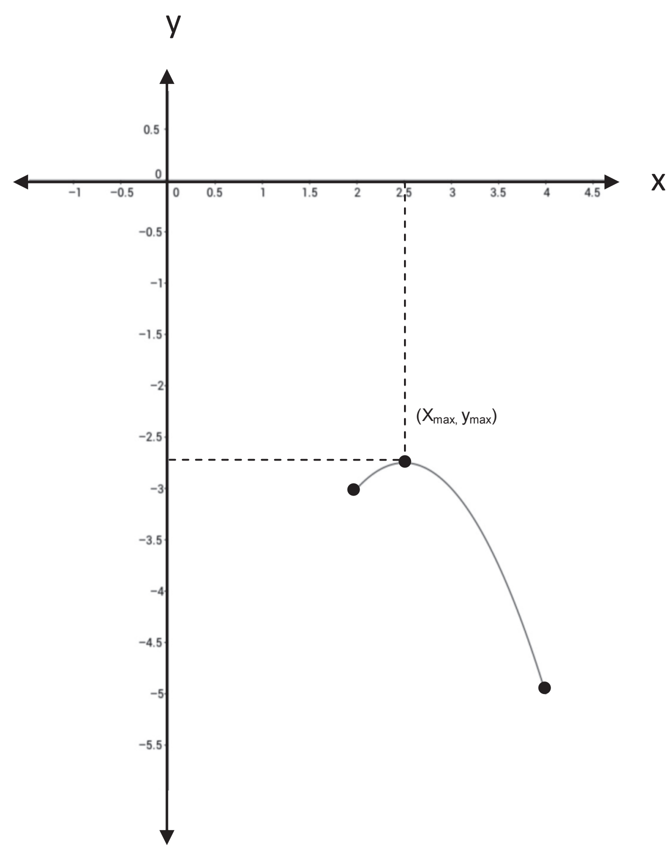
$-4 < \ y \leq \frac{1}{2}$

$$\text{Rf: } \forall \text{y} \in \left]-4, \frac{1}{2}\right]$$

g) Sea la función:

$$f: [2, 4] \ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{x} \ \rightarrow \text{y=f(x) = - x}^2 \text{ + 5x - 9}$$



a = - 1
b = 5
c = - 9

$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2(-1)} = \frac{5}{2}$

$y_{max} = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-9)- 5^2}{4(-1)} = -\frac{11}{4}$

Punto máximo $\left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right)$

Dominio de la función f, Df: $\forall$x $\in$ [2, 4]

Para hallar el recorrido de $y =$ - x^2 + 5x - 9

$$\text{y} = \ -\left(\text{x} - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}$$

$x \in \ [2, 4]$

$2 \leq \ x \ \leq 4$

$-\frac{1}{2} \leq \ x - \ \frac{5}{2} \leq \frac{3}{2}$

$$0 \leq \ (x - \frac{5}{2})^2 \leq \frac{9}{4}$$

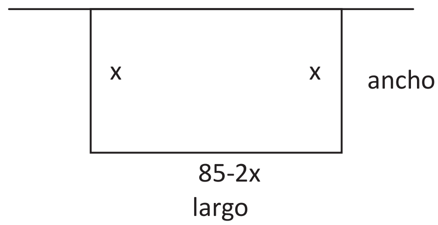
$0 \ \geq -(x - \ \frac{5}{2})^2 \geq -\ \frac{9}{4}$

$$-\frac{11}{4} \geq -(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{11}{4} \geq -5$$

$$-5 \leq \ y \leq \ -\frac{11}{4}$$

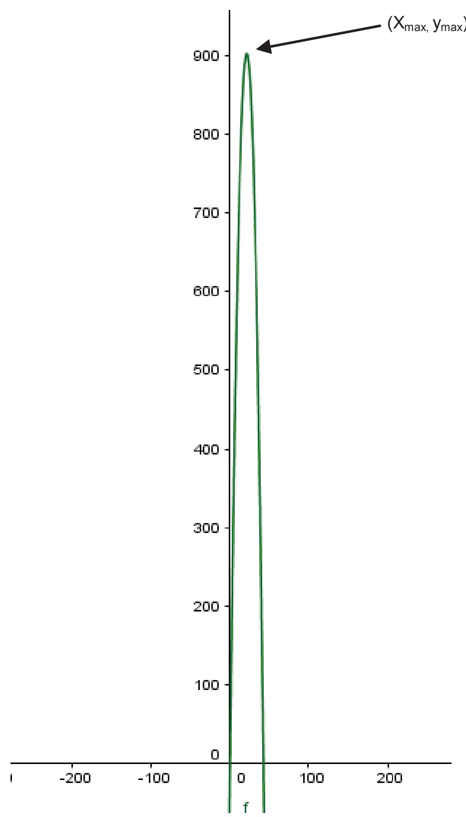
$$Rf: \forall y \in \left[-5, -\frac{11}{4}\right]$$

h) Se dispone de un alambre de 85 metros para cercar con los 3 lados un terreno de tal manera de se obtenga el área máxima. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno.?



Solución:

El área del rectángulo es: base x altura (largo x ancho)



A= b x h

A= (85 – 2x) x

A= 85x – 2x^2

Se necesita encontrar para que valor de x

el área es máxima.

x $_{max}$ = $\frac{-b}{2a} = \frac{-85}{2(-2)} = \frac{85}{4}$= 21,25

A $_{max}$ = $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(-1)(0)-85^2}{4(-2)} = \frac{7225}{8} = \ 903{,}125$

Punto máximo $\left(\frac{85}{4}, \frac{7225}{8}\right)$

Las dimensiones del terreno son:

ancho x= 21,25 m

largo = 85 – 2x

largo = 85 – 2(21,25)

largo = 42.5

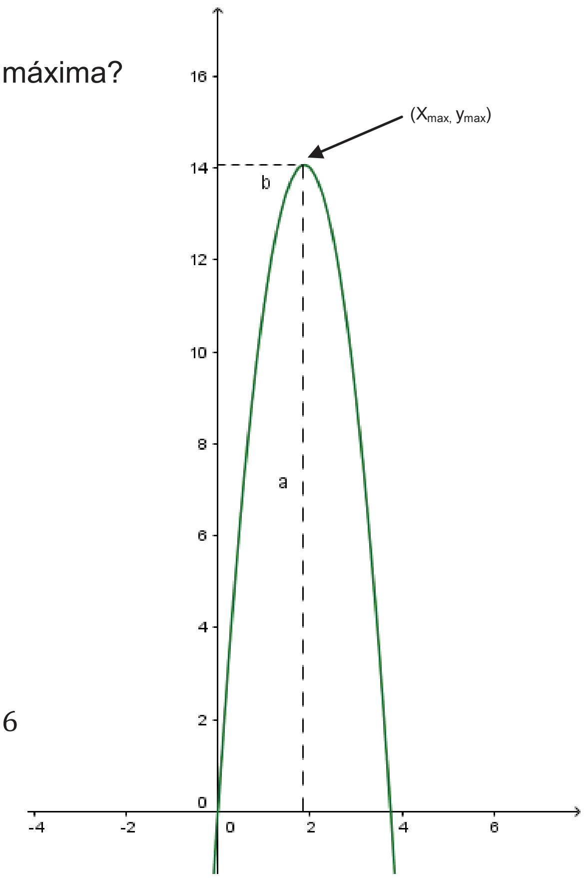
Área máxima= 903.12

i) Se lanza un proyectil desde el suelo hacia arriba, describiendo un movimiento parabólico. Si se conoce que la altura máxima media en metros que alcanza el proyectil se calcula a través de la función:

$H(t) = -4t^2 + 15t.$

Calcular:

a) ¿En qué momento alcanza la altura máxima?
b) ¿ Cuál es la altura máxima?



Solución:

$H(t) = - 4t^2 + 15t$

a= -4

b=15

c=0

$t\ max = \frac{-b}{2a} = \frac{-15}{2(-4)} = \frac{-15}{-8} = 1{,}85$

$H\ max = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(-4)(0)-15^2}{4(-4)} = \frac{-225}{-8} = 14{,}06$

Punto máximo $\left(\frac{15}{8}, \frac{225}{8}\right)$

a) La altura máxima es alcanzada a un tiempo t=1,85s
b) La altura máxima es H= 14,06m

j) Una compañía que vende agua embotellada vende semanalmente x número de botellas de agua a p dólares cada una, la relación entre p (precio) y x (número de artículos vendidos) está dada por la siguiente ecuación de demanda:

P = x - 246

¿Cuántos botellas de agua debe vender la compañía para obtener un ingreso semanal de $1.000?

Solución:

Ingreso requerido I =1000

Precio de venta P= x -246

Número de artículos vendidos= x

Ingreso= precio de venta x número de artículos vendidos

I = P x

1000= (x-246) x

1000= x^2 - 246x

x^2 - 246x -1000=0

x^2 - 246x - 1000=0

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-246) \pm \sqrt{(-246)^2 - 4(1)(-1000)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{246 \pm \sqrt{60516 + 4000)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{246 \pm \sqrt{64516}}{2}$$

X = 250 v x = - 4

Consideramos solamente el valor entero positivo que es x = 250.

Por lo tanto la compañía debe vender 250 botellas de agua semanalmente.

1.3.3.4 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

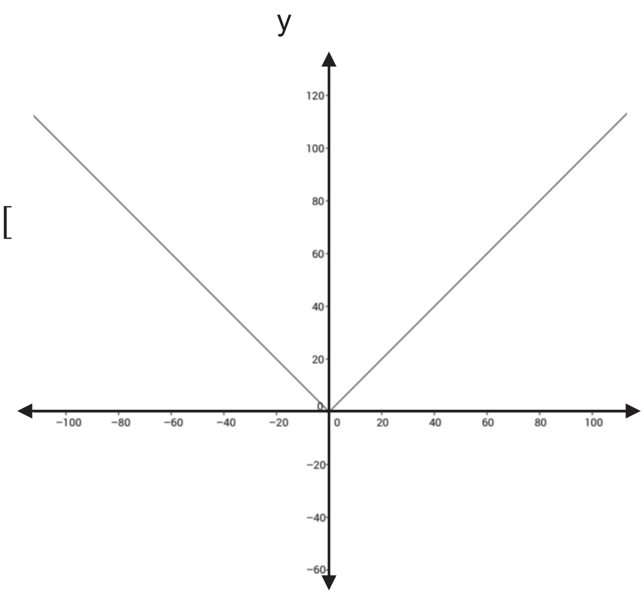
La función valor absoluto se define de la siguiente manera:

f $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

x → y = f (x) = $|x|$

$Df: \forall x \in \mathbb{R}$

$Rf: \forall y \ \in [\ 0, +\infty[$

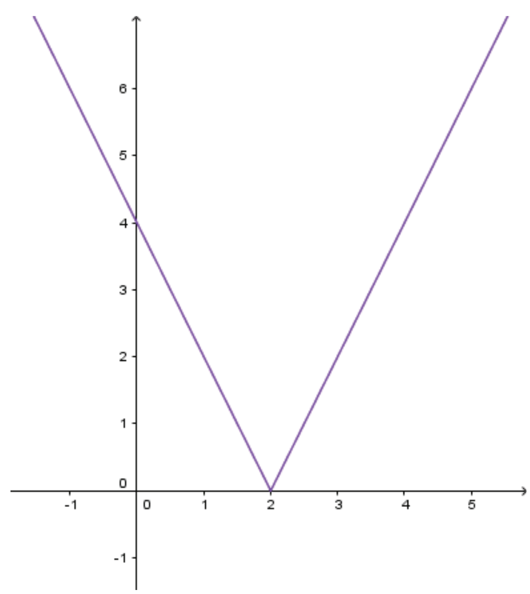


Ejemplos:

a) Sea la función

$f: \mathbb{R} \ \rightarrow \mathbb{R}$

x → y=f(x) = $|2x\ -4|$



Dominio de f:

$Df: \forall x \in \mathbb{R}$

Recorrido de f:

$x \in \ \mathbb{R}$

$2x \in \ \mathbb{R}$

$2x - 4 \ \in \ \mathbb{R}$

$|2x - 4| \geq 0$

$Rf: \forall y \ \in [\ 0, +\infty[$

b) Sea la función

$f:]0,3] \rightarrow \mathbb{R}$

x $\rightarrow$ y=f(x) = $|-3x+5|$

Dominio de f:

$Df: \forall x]0,3]$

Recorrido de f:

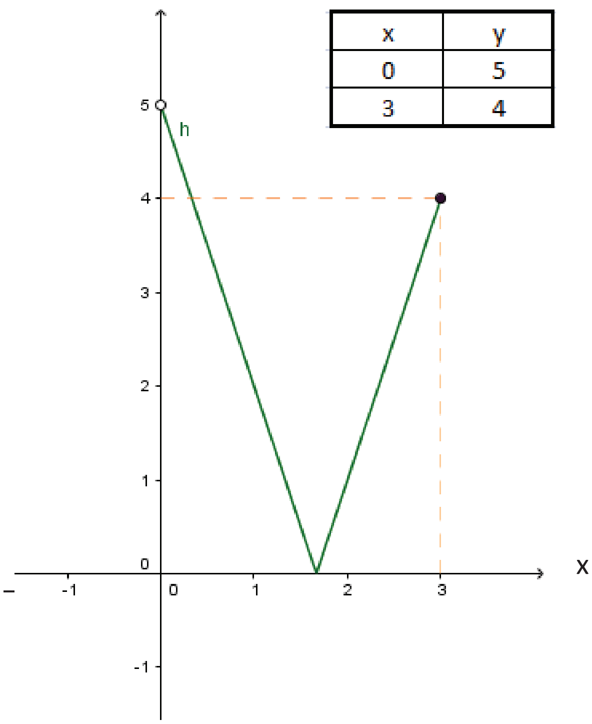
$x \in \ ]0,3]$

$0 < x \leq 3$

$0 > -3x \geq -9$

$5 > -3x + 5 \geq -4$

$0 \leq |-$



x	y
0	5
3	4

$0 \leq y < 5$

$Rf: \forall y \ \in [0,5]$

c) Sea la función

$f:]-1,4] \rightarrow \mathbb{R}$

x $\rightarrow$ y=f(x) = $|-4x+8| - 2$

Dominio de f:

$x \in \ ]-1,4]$

Recorrido de f:

$-1 < x \leq 4$

$4 > -4x \geq -16$

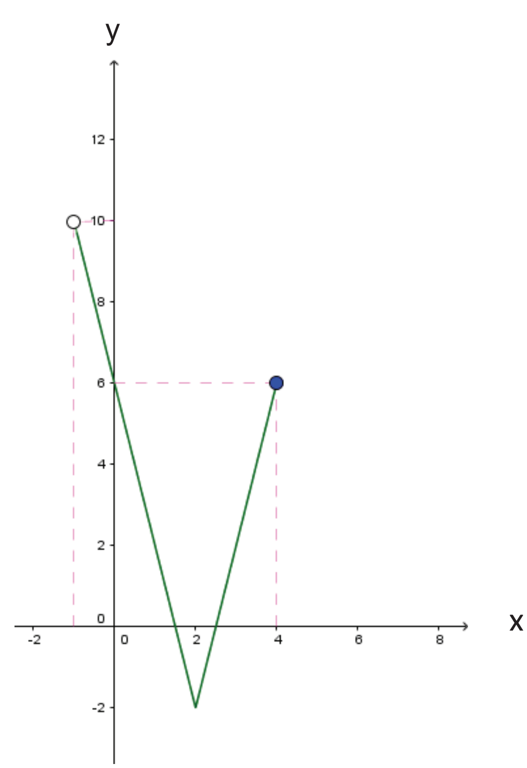
$12 > -4x + 8 \geq -8$

$0 \leq |-4x+8| < 12$

$-2 \leq |-4x+8| - 2 < 10$

$-2 \leq y < 10$

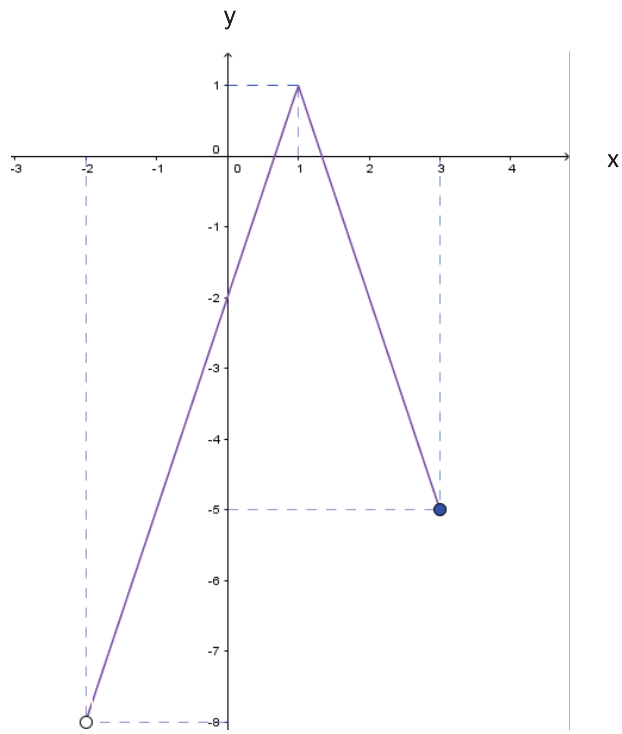
$Rf: \forall y \ \in [-2,10[$



d) Sea la función

$f:]-2{,}3] \rightarrow \mathbb{R}$

x $\rightarrow$ y=f(x) = - $|3x - 3| + 1$



Dominio de f:

$x \in \ ]-2{,}3]$

Recorrido de f:

$-2 < x \leq 3$

$-6 < 3x \leq 9$

$-9 < 3x - 3 \leq 6$

$0 \leq |3x - 3| < 9$

$0 \geq -|3x - 3| > -9$

$1 \geq -|3x - 3| + 1 > -8$

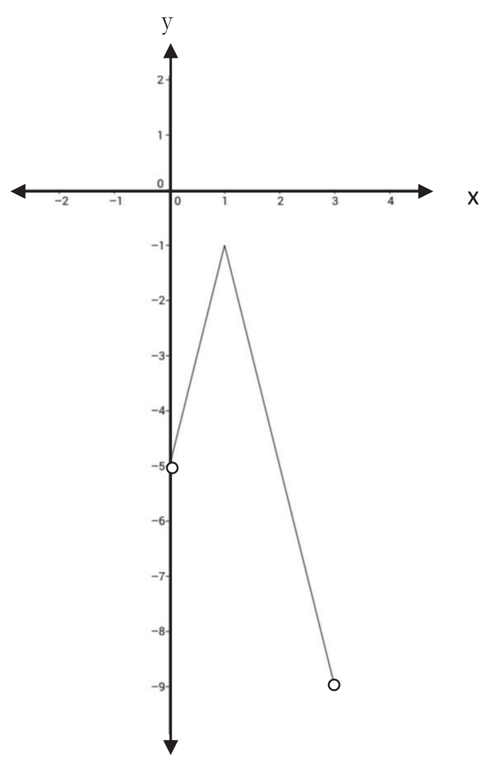
$-8 < y \leq 1$

$Rf: \forall y \ \in]-8, 1]$

e) Sea la función

$f:]0, 3[\rightarrow \mathbb{R}$

x $\rightarrow$ y=f(x) = - $|-4x + 4| - 1$



Dominio de f:

$x \in \ ]-0, 3[$

Recorrido de f:

$0 < x < 3$

$0 > -4x > -12$

$4 > -4x + 4 > -8$

$0 \leq |-4x + 4| < 8$

$0 \geq -|-4x + 4| > -8$

$0 \geq -|-4x + 4| - 1 > -9$

$0 \geq y > -9$

$-9 < y \leq -1$

$Rf: \forall y \ \in \ ]-9, -1]$

1.3.3.5 FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

La raíz cuadrada se define de la siguiente manera:

f: $[\mathbf{0}, +\infty[\quad \rightarrow \quad [\mathbf{0}, +\infty[$

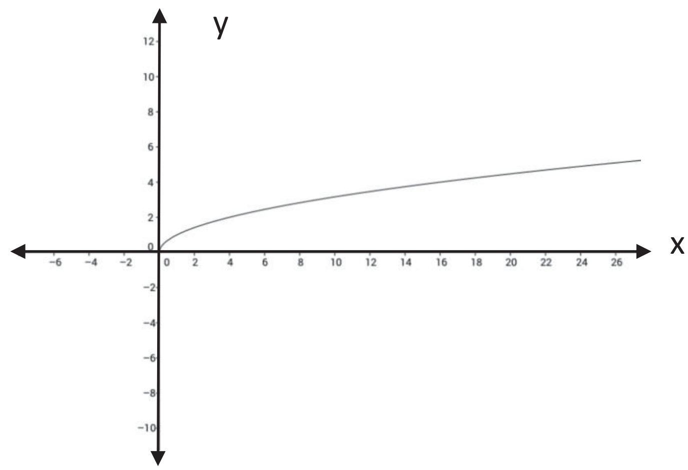
x $\rightarrow$ **y = f (x) =** $\sqrt{\boldsymbol{x}}$

Dominio de f:

$Df: \forall x \in [\mathbf{0}, +\infty[$

Recorrido de f:

$Rf: \forall y \ \in [\ 0, +\infty[$



Ejemplos:

a) Sea la función

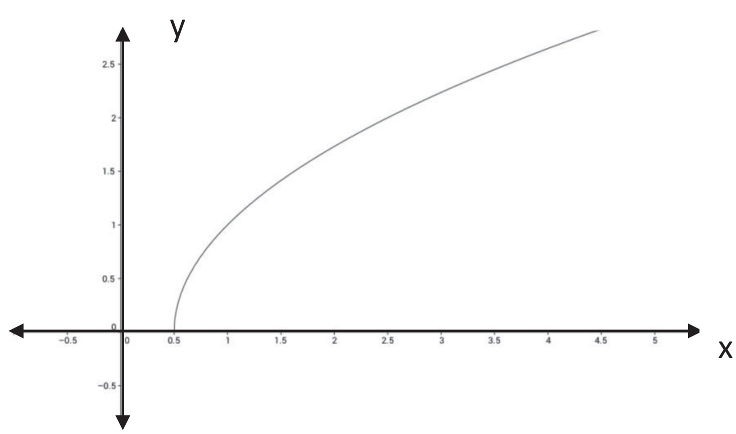
y = f (x) = $\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}}$

Dominio de f:

$2x - 1 \geq 0$

$x \geq \frac{1}{2}$

$Df: \forall x \in \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, +\infty\right[$



Recorrido de f:

$x \geq \frac{1}{2}$

$2x \geq 1$

$2x - 1 \geq 0$

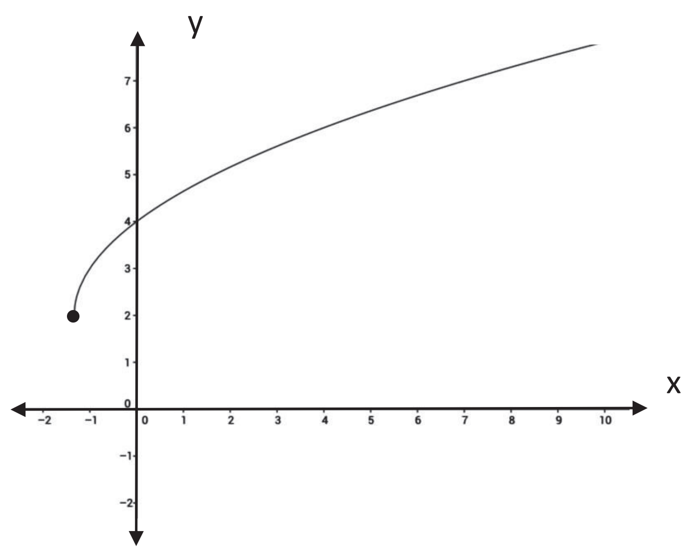
$\sqrt{2x - 1} \geq 0$

$y \geq 0$

$Rf: \forall y \in [\,0, +\infty[$

b) Determinar el dominio y recorrido de la siguiente relación para que sea función

y = f (x) = $\sqrt{3x+4}$ +2



Dominio de f:

$3x + 4 \geq 0$

$3x \geq -4$

$x \geq -\frac{4}{3}$

$Df: \forall x \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$

Recorrido de f:

$x \geq -\frac{4}{3}$

$3x \geq -4$

$3x + 4 \geq 0$

$\sqrt{3x+4} \geq 0$

$\sqrt{3x+4} + 2 \geq 2$

$y \geq 2$

$Rf: \forall y \in [\,2, +\infty[$

c) Dada la función

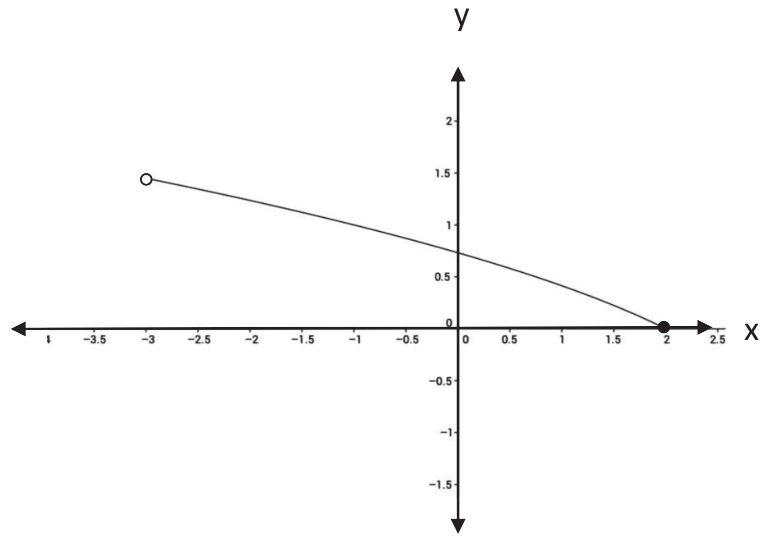
$\boldsymbol{f}:]-\mathbf{3}, \mathbf{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

x $\rightarrow$ **y = f (x) =** $\sqrt{-x+3}$ **-** 1

Determinar el recorrido de f

Dominio de f:

$\forall x \in \,]-\mathbf{3}, \mathbf{2}]$



Recorrido de f:

$-3 < x \leq 2$

$3 > -x \geq -2$

$6 > -x + 3 \geq 1$

$\sqrt{6} > \sqrt{-x+3} \geq 1$

$\sqrt{6} - 1 > \sqrt{-x+3} - 1 \geq 0$

$0 \leq y < \sqrt{6} - 1$

$Rf: \forall y \ \in [\, 0, \sqrt{6} - 1[$

d) Dada la función

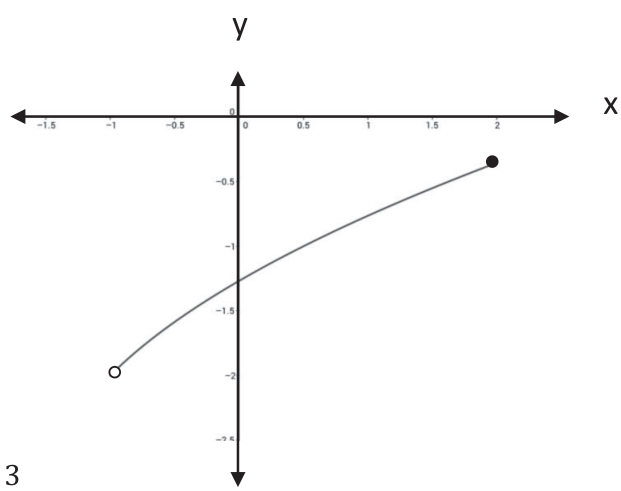
$\boldsymbol{f}:]-\mathbf{1}, \mathbf{2}] \rightarrow \ \mathbb{R}$

x $\rightarrow$ **y = f (x) =** $\sqrt{\mathbf{2x+3}}$ - 3

Determinar el recorrido de f

Dominio de f:

$\forall x \in \,]-\mathbf{3}, \mathbf{2}]$



Recorrido de f:

$-1 < x \leq 2$

$-2 < 2x \leq 4$

$1 > 2x + 3 \geq 7$

$-2 > \sqrt{2x+3} - 3 \geq \sqrt{7} - 3$

$-2 > y \geq \sqrt{7} - 3$

$Rf: \forall y \ \in [\, \sqrt{7} - 3, -2[$

e) Un objeto es soltado en caída libre desde un edificio de 800 m de altura. Determinar el tiempo que tarda en llegar al suelo.

Solución:

La fórmula que permite calcular el tiempo es: $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, donde g=9.8 m/s^2, corresponde a la aceleración de la gravedad que es

Datos:

H=700 m

g = 9.8 m/s^2

Aplicando la fórmula $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Se tiene:

$$T = \sqrt{\frac{2(800\ m)}{9.8\ s^2}}$$

$$T = \sqrt{\frac{1600\ m/s}{9.8\ s^2}}$$

$$T = \sqrt{163.26\ s^2}$$

$$T = 12.77\ s$$

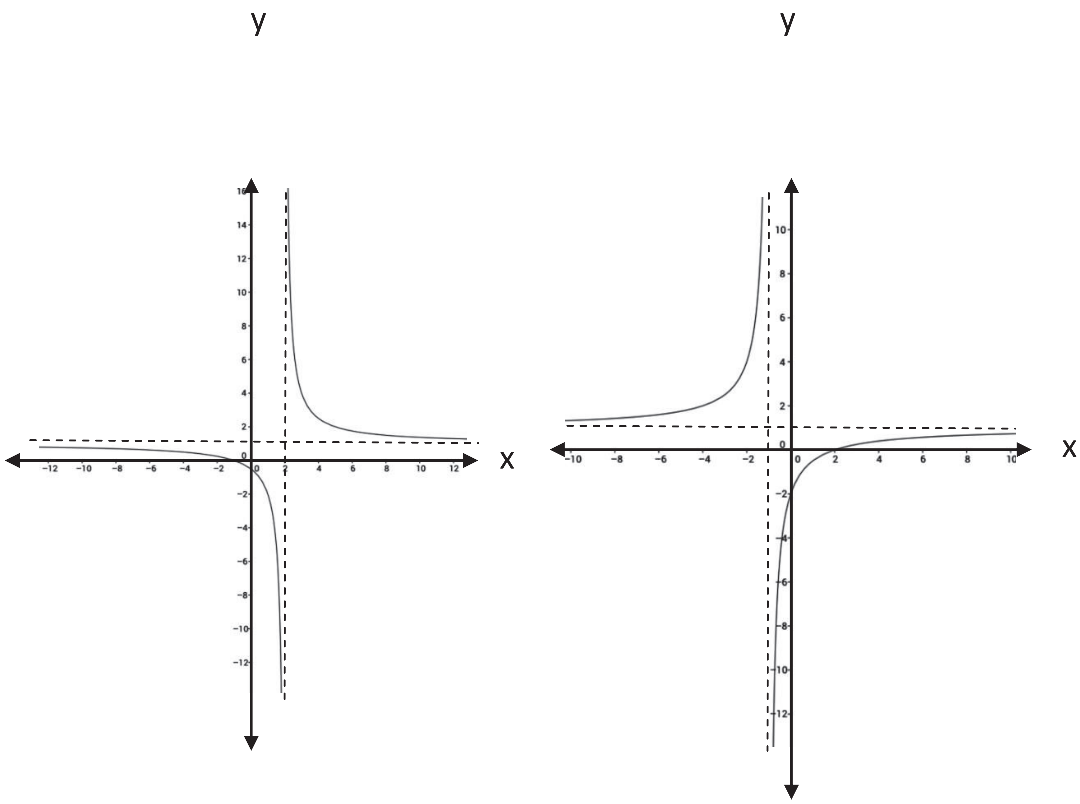
El tiempo que se demora el objeto es llegar al suelo es T=11.95 s

1.3.3.6 FUNCIÓN RACIONAL

La función racional puede estar expresada de la siguiente manera:

$$y = f(x) = \frac{N(x)}{M(x)}$$

Donde N y M son polinomios y $M(x) \neq 0$



Ejemplo:

a) Dada la función

$$\mathbf{y = f\ (x) =} \frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{x+1}}$$

Determinar el dominio y recorrido de f

Dominio de f:

$\boldsymbol{x + 1 \neq 0}$

$\boldsymbol{x \neq -1}$

$Df\!:\ \ \forall x \in \mathbb{R} - \{\boldsymbol{-1}\}$

Recorrido de f:

$y = f\,(x) = \frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$

$$\begin{array}{rr|l} x & -\,2 & x \;+\; 1 \\ \cline{3-3} -x & -\,1 & 1 \\ \cline{1-2} & -\,3 & \end{array}$$

$x \neq -1$

$x + 1 \neq 0$

$\frac{1}{x+1} \neq 0$

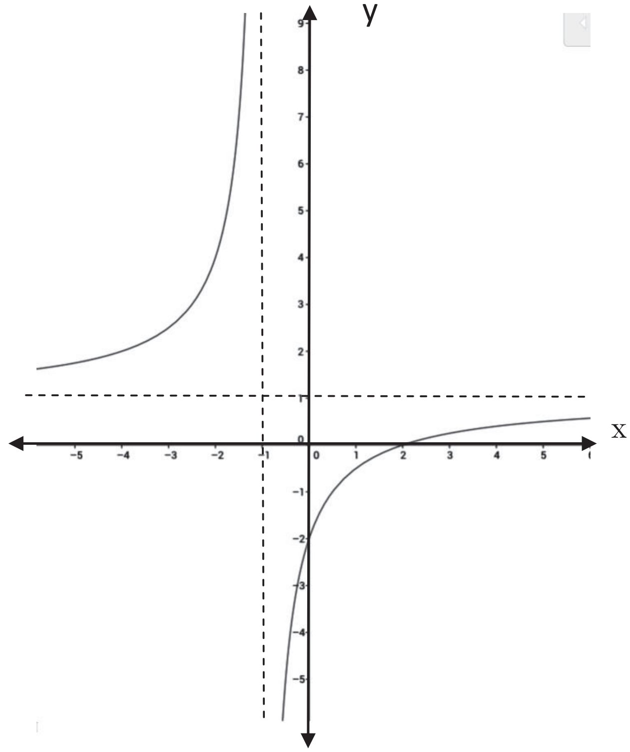
$\frac{3}{x+1} \neq 0$

$-\frac{3}{x+1} \neq 0$

$1 - \frac{3}{x+1} \neq 1$

$y \neq -1$

$Rf: \forall y \in \mathbb{R} - \{-1\}$



b) Dada la función

$$\mathbf{y} = \frac{2x-4}{x-3}$$

Determinar el dominio y recorrido de f

Dominio de f:

$\boldsymbol{x - 3 \neq 0}$

$\boldsymbol{x \neq 3}$

$Df: \;\forall x \in \boldsymbol{R} - \{\mathbf{3}\}$

Recorrido de f:

$\mathbf{y} = \frac{\boldsymbol{2x-4}}{\boldsymbol{x-3}} = 2 + \frac{2}{x-3}$

$$\begin{array}{rr|l} 2x & -\ 4 & x\ -\ 3 \\ \hline -2x & +\ 6 & 2 \\ \hline & +\ 2 & \end{array}$$

$x \neq 3$

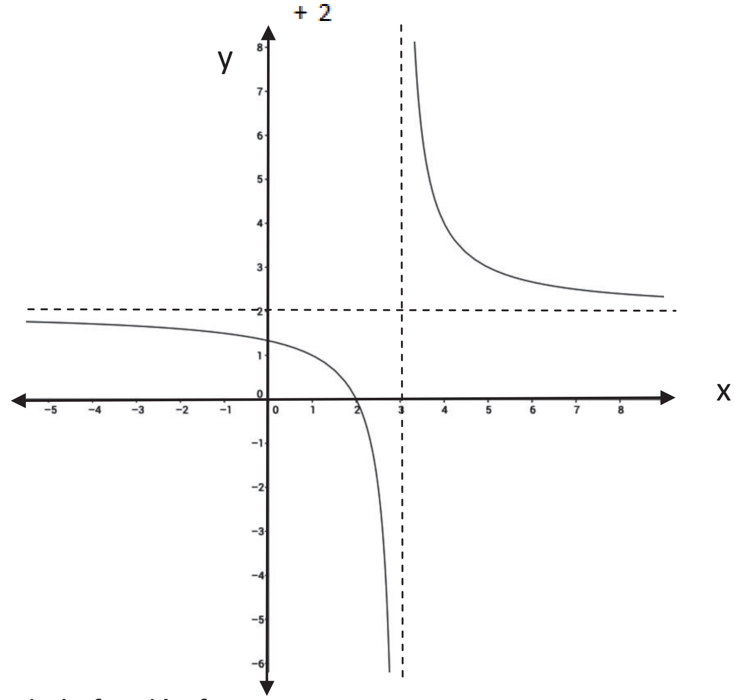
$x - 3 \neq 0$

$\frac{1}{x-3} \neq 0$

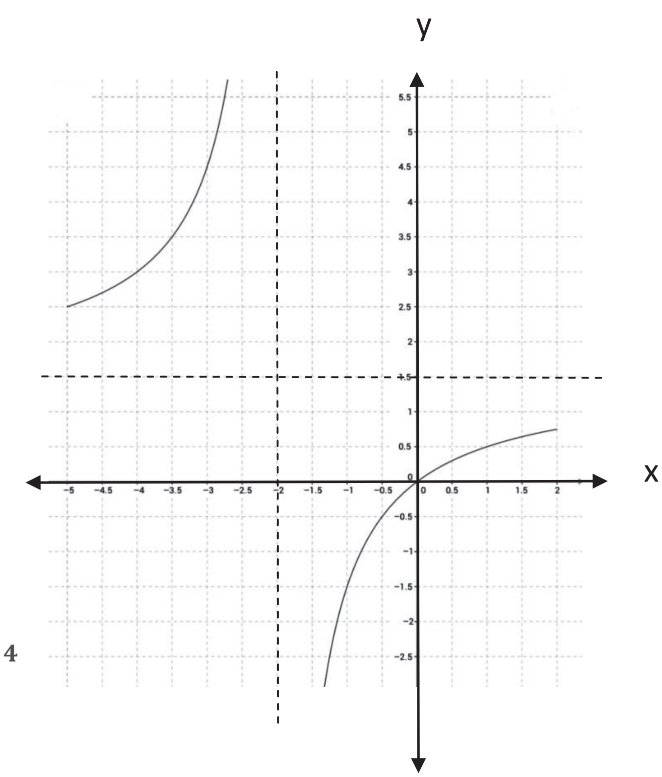
$\frac{2}{x-3} \neq 0$

$2 + \frac{2}{x-3} \neq 2$

$y \neq 2$



c) Determinar el recorrido de la función f:



$\boldsymbol{f}: [\mathbf{-5, 2}] - \{\mathbf{-2}\} \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y} = \frac{\boldsymbol{3x}}{\boldsymbol{2x+4}}$

Dominio de f:

$\forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{-5, 2}] - \{\mathbf{-2}\}$

Recorrido de f:

$\mathbf{y} = \frac{\boldsymbol{3x}}{\boldsymbol{2x+4}} = \frac{3}{2} - \frac{6}{2x+4} = \frac{3}{2} - \frac{3}{x+2}$

$\boldsymbol{-5 \leq x \leq -2} \quad \mathbf{v} \quad \boldsymbol{-2 \leq x \leq 2}$

$\boldsymbol{-3 \leq x+2 \leq 0} \quad \mathbf{v} \quad \boldsymbol{0 \leq x+2 \leq 4}$

$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \geq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x+2}} \quad \mathbf{v} \quad \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x+2}} \geq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

$$\mathbf{1} \leq -\frac{3}{x+2} \quad \vee \quad -\frac{3}{x+2} \leq -\frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{2} \leq \frac{3}{2} - \frac{3}{x+2} \quad \vee \quad \frac{3}{2} - \frac{3}{x+2} \leq \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{2} \leq \boldsymbol{y} \quad \vee \quad \boldsymbol{y} \leq \frac{3}{4}$$

$$\boldsymbol{Rf}: \forall \boldsymbol{y} \in \left]-\infty, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right] \cup \left[\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}, +\infty\right[$$

d) Una empresa que produce vasos tiene unos costos mensuales de producción igual a los costos fijos más los costos variables.
Los costos fijos son de \$825 mensuales y los Costos variables son de 2.9 por cada vaso.
Determinar la función que describa el costo unitario de los vasos en función de la producción mensual y su gráfico.

Solución:

CT : Cf + Cv

donde CT= costo total

Cf : Costos fijos
Cv : Costos variables

Por lo tanto CT= 825 + 2.9 x

x : número de vasos

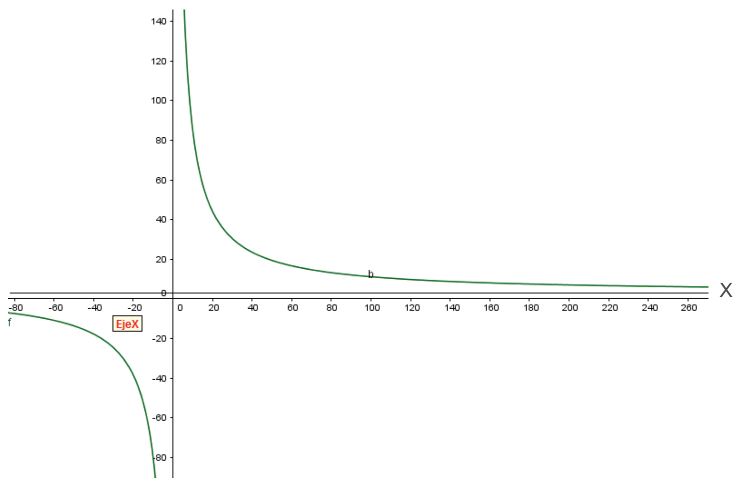
La función que describe el costo unitario es:

$$\mathbf{Cu} = \frac{\mathbf{CT}}{\mathbf{x}}$$

Cu : costo unitario

$$\mathbf{Cu} = \frac{825 + 2.9\,\mathrm{x}}{\mathbf{x}}$$

Y



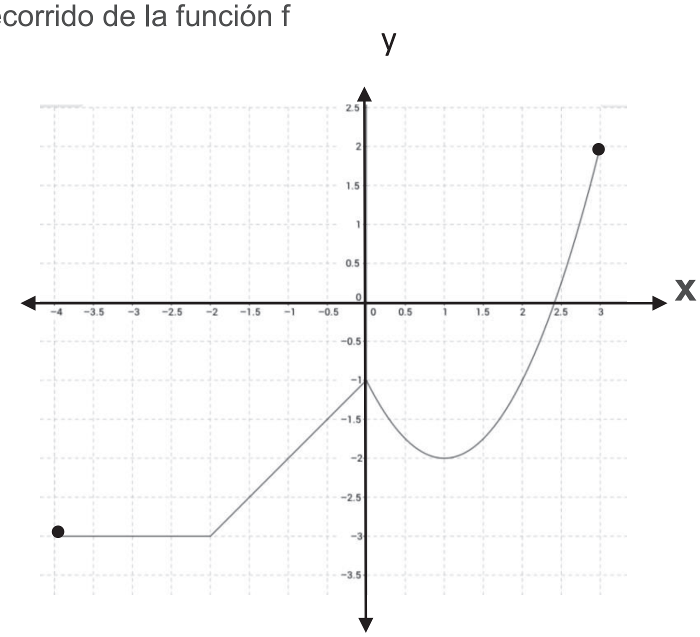
1.3.4 MISCELÁNEA DE EJERCICIOS

a) Sea la función:

$$f:[-4,3] \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$x \quad \rightarrow \quad y = f(x) = \begin{cases} -3 & si -4 \leq x < -2 \\ x-1 & si -2 \leq x \leq 0 \\ x^2-2x-1 & si \quad 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

Determinar el recorrido de la función f



i) $-4 \leq x < -2 \quad y = -3$

ii) $-2 \leq x \leq 0$

$-3 \leq x - 1 \leq -1$

$y \epsilon [-3, -1]$

iii)

$y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$

$0 < x \leq 3$

$-1 < x - 1 \leq 2$

$0 \leq (x-1)^2 \leq 4$

$-2 \leq (x-1)^2 - 2 \leq 2$

$-2 \leq y \leq 2$

Rf = $\{-3\} \cup [-3, -1] \cup [-2, 2]$

Rf = $\forall\ y \in [-3, 2]$

b) Dada la función

y = f (x) = $\sqrt{\frac{2x-3}{x+4}}$

Determinar el dominio y recorrido de la función f

Dominio:

$$\frac{\mathbf{2x-3}}{\mathbf{x+4}} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{2x-3 \geq 0}$$

$$\mathbf{2x \geq 3}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{4} > 0$$
$$\boldsymbol{x} > -4$$

	$-\infty$ -4	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
2x-3	-	-	+
x+4	-	+	+
	+	-	+

$$x < -4 \quad \text{v} \quad x \geq \frac{3}{2}$$

Df: $\forall \boldsymbol{x\epsilon}\ ]-\infty, -\mathbf{4}[\ \cup \left[\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}, +\infty\right[$

Recorrido:

y = f (x) = $\sqrt{\frac{\mathbf{2x-3}}{\mathbf{x+4}}} = \sqrt{\mathbf{2} - \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{x+4}}}$

$\mathrm{x} < -4 \quad \text{v} \quad x \geq \frac{3}{2}$

$\mathrm{x} + 4 < 0 \quad \text{v} \quad x + 4 \geq \frac{11}{2}$

$\frac{1}{\mathrm{x}+4} < 0 \quad \text{v} \quad 0 < \frac{1}{\mathrm{x}+4} \leq \frac{2}{11}$

$-\frac{1}{\mathrm{x}+4} > 0 \quad \text{v} \quad 0 > -\frac{1}{\mathrm{x}+4} \geq -\frac{2}{11}$

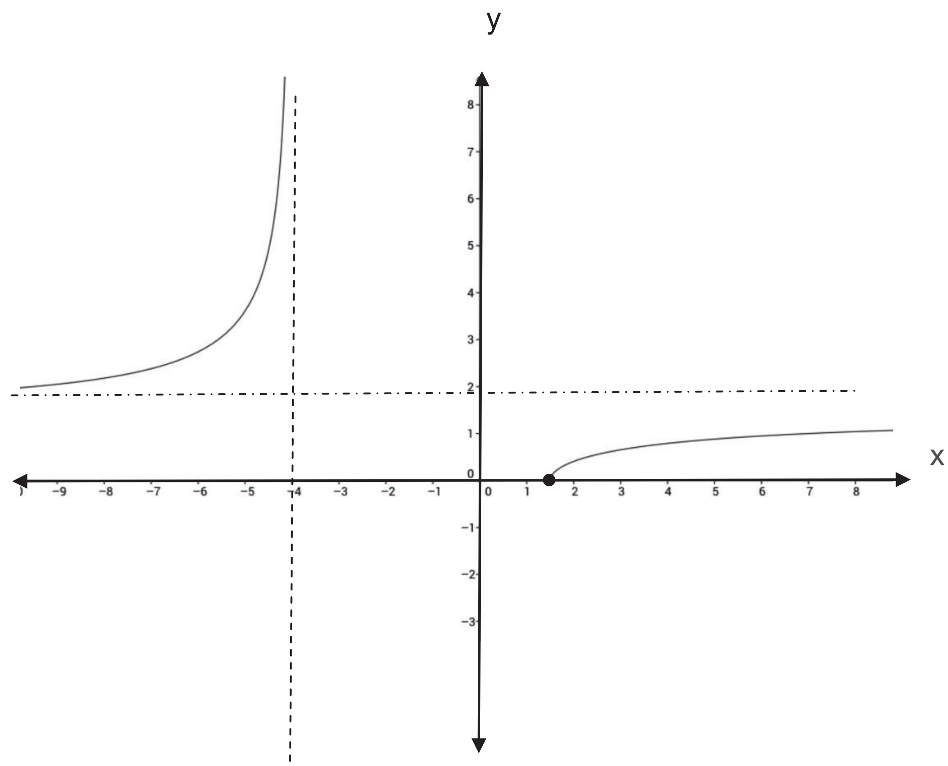
$-\frac{11}{\mathrm{x}+4} > 2 \quad \text{v} \quad 0 > -\frac{11}{\mathrm{x}+4} \geq -2$

$2 - \frac{1}{\mathrm{x}+4} > 2 \quad \text{v} \quad 2 > 2 - \frac{1}{\mathrm{x}+4} \geq 0$

$\mathrm{y} > 2 \quad \text{v} \quad 0 \leq y < 2$

Rf = $\forall y \in \left]\mathbf{2}, +\infty\right[\cup \left[\mathbf{0}, \mathbf{2}\right[$

Rf = $\forall\ y \in [0, +\infty[- \{2\}$



c) Dada la función

y = f (x) = $\left|\frac{2-x}{2x+5}\right|$

Determinar el dominio y recorrido de la función f

Dominio:

$$\left|\frac{\mathbf{2} - \boldsymbol{x}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}}\right| \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{5} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{2}\boldsymbol{x} \neq -\mathbf{5}$$

$$\boldsymbol{x} \neq -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$

$\boldsymbol{Df}: \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right\}$

Recorrido:

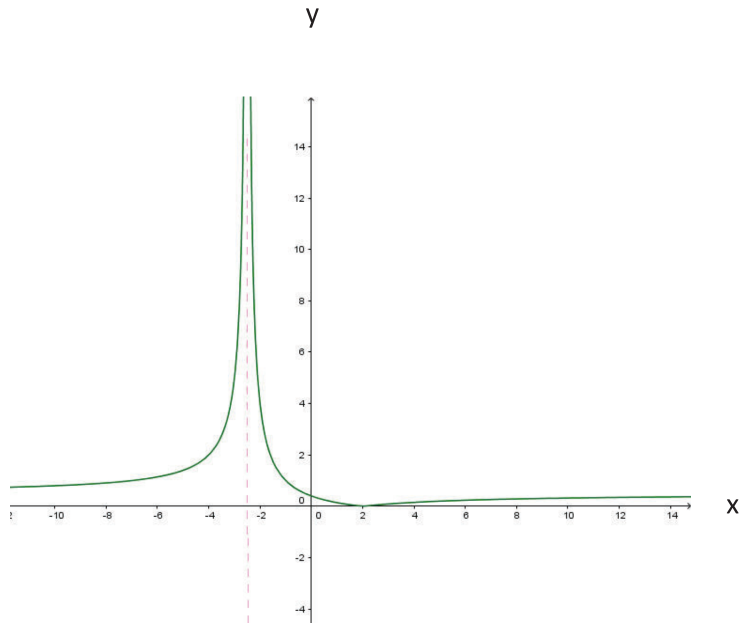
y = f (x) = $\left|\frac{2-x}{2x+5}\right| = \left|-\frac{1}{2}+\frac{9}{4x+10}\right|$

$x \neq -\frac{5}{2}$

$4x \neq -10$

$4x+10 \neq 0$

$\frac{1}{4x+10} \neq 0$



$-\frac{1}{2}+\frac{9}{4x+10} \neq -\frac{1}{2}$

$\left|-\frac{1}{2}+\frac{9}{4x+10}\right| \geq 0$

$y \geq 0$

Rf = $\forall\ y\ \in\ [0,+\infty[$

d) Dada la función

y = f (x) = $\sqrt{2x^2+3x+1}$

Determinar el dominio y recorrido de la función f

Dominio:

$2x^2+3x+1 \geq 0$

$2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8} \geq 0$

$2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{8}$

$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{16}$

$$\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2} \geq \sqrt{\frac{1}{16}}$$

$$\left|\left(x+\frac{3}{4}\right)\right| \geq \frac{1}{4}$$

$$x+\frac{3}{4} \leq -\frac{1}{4} \quad \text{v} \quad x+\frac{3}{4} \geq \frac{1}{4}$$

$$x \leq -1 \quad \text{v} \quad x+\frac{3}{4} \geq -\frac{1}{2}$$

$$x \leq -1 \text{ v } x \geq -\frac{1}{2}$$

Df: $\forall x \epsilon \;]-\infty, -1] \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Recorrido:

y = f (x) = $\sqrt{2x^2+3x+1} = \sqrt{2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}}$

$$x \leq -1 \text{ v } x \geq -\frac{1}{2}$$

$$x+\frac{3}{4} \leq \frac{-1}{4} \quad \text{v} \quad x+\frac{3}{4} \geq \frac{1}{4}$$

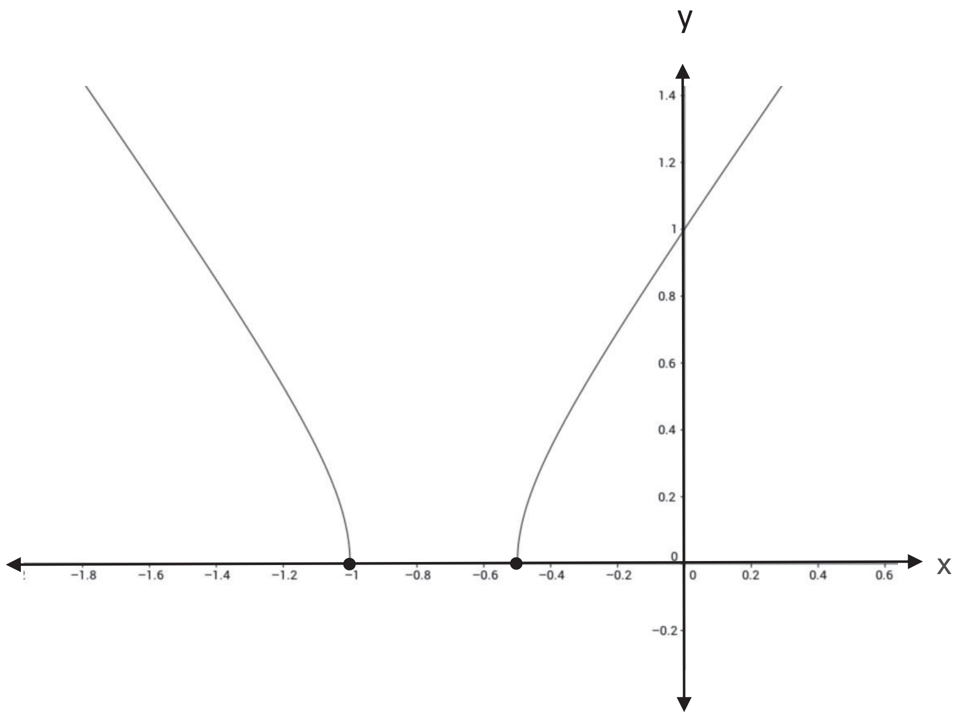
$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{16} \quad \text{v} \quad \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{16}$$

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{16}$$

$$2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{8}$$

$$2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}\geq 0$$

$$y\ \geq 0$$



e) Determinar el recorrido de la siguiente función

$$y=f(x)=\begin{cases}\frac{2x+4}{2x-2} & si-4\leq x<1\\ 3x+1\ si\ \ 1\leq x<3\end{cases}$$

$$y=\ \frac{2x+4}{2x-2}=1+\frac{6}{2x-2}\qquad\qquad y=\ 3x+1$$

$$-4\leq x<1\qquad \text{v}\qquad 1\leq x<3$$

$$-8\leq 2x<2\qquad \text{v}\qquad 3\leq 3x<9$$

$$-10\leq 2x-2<0\qquad \text{v}\qquad 4\leq 3x+1<10$$

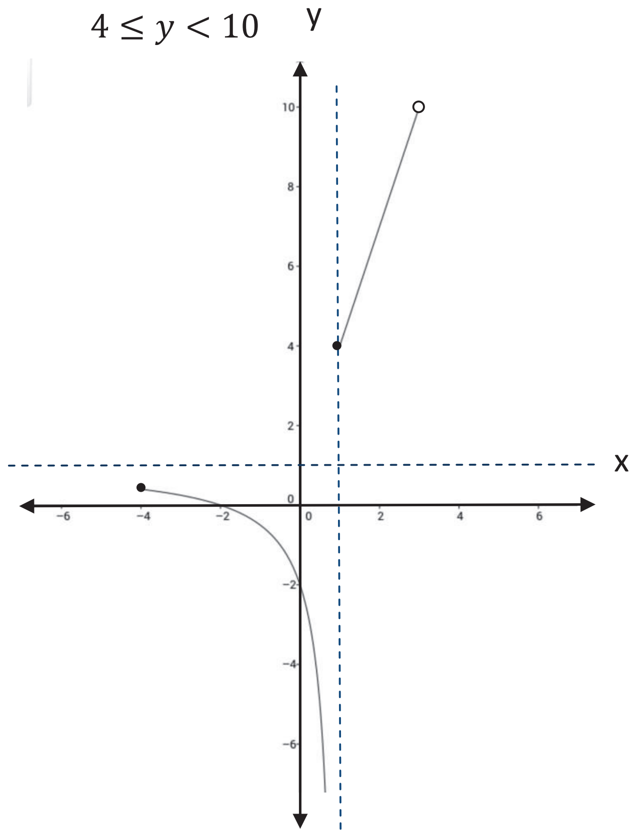
$\frac{1}{2x-2} \leq -\frac{1}{10}$ v $4 \leq y < 10$

$\frac{6}{2x-2} \leq -\frac{3}{5}$

$1 + \frac{6}{2x-2} \leq \frac{2}{5}$

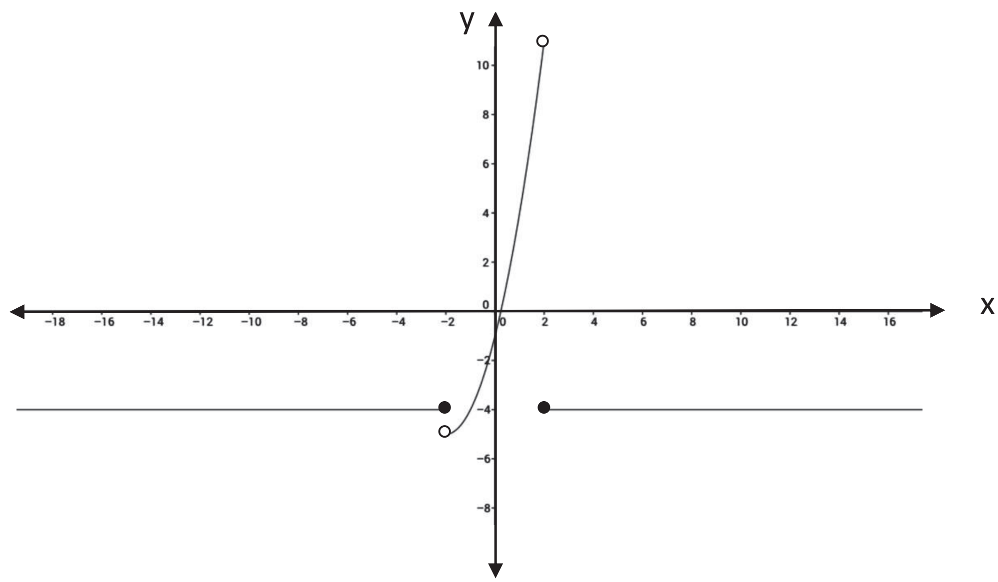
$y \leq \frac{2}{5}$

Rf = $\forall y \in \left]-\infty, \frac{2}{5}\right] \cup [\mathbf{4}, \mathbf{10}[$



f) Determinar el recorrido de la siguiente función

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 1 & si\ |x| < 2 \\ -4\ si\ |x| \geq 2 \end{cases}$$



$y = x^2 + 4x - 1 = (x+2)^2 - 5$

i)

$|x| < 2$

$-2 < x < 2$

$0 < x + 2 < 4$

$0 < (x+2)^2 < 16$

$-5 < (x+2)^2 - 5 < 11$

$-5 < y < 11$

ii) $|x| \geq 2$

$x \leq -2 \text{ v x } \geq 2$

y = - 4

Rf = $\forall y \in \left]-\mathbf{5}, \mathbf{11}\right[\cup \{-\mathbf{4}\}$

Rf = $\forall y \in \left]-\mathbf{5}, \mathbf{11}\right[$

g) Determinar el recorrido de la siguiente función

$$y = f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x+4} \ \ si -4 < x \leq -1 \\ |-x^2 + x + 2| \ si \ \ x > -1 \end{cases}$$

i)

$-4 < x \leq -1$

$4 > -x \geq 1$

$8 > -x + 4 \geq 5$

$\sqrt{8} > \sqrt{-x+4} \geq \sqrt{5}$

$-2\sqrt{2} < -\sqrt{-x+4} \leq -\sqrt{5}$

$-2\sqrt{2} < y \leq -\sqrt{5}$

ii) $y = |-x^2 + x + 2| = \left|-(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}\right|$

$x > -1$

$x - \dfrac{1}{2} > -\dfrac{3}{2}$

$\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

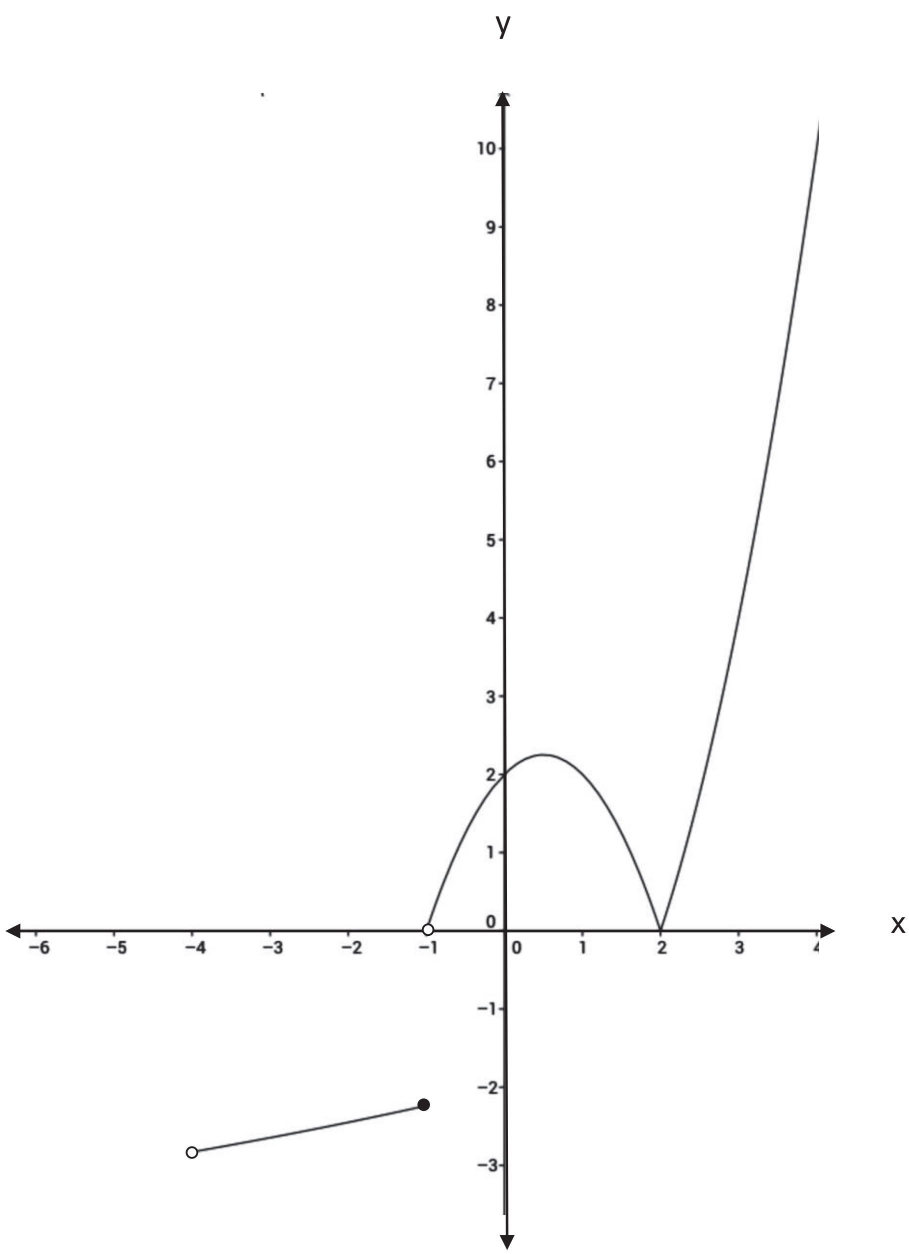
$-\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0$

$-\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4} \leq \dfrac{9}{4}$

$\left|-\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4}\right| \geq 0$

$y \geq 0$

Rf = $\forall y \in \left]-2\sqrt{2}, -\sqrt{5}\right] \cup [0, +\infty[$



2.- BIBLIOGRAFÍA

1. Nuñez J., (2015). Fundamentos de la Matemática, Quito.
2. Lara, J.; Arroba, J.; (2012). Análisis Matemático. Quinta edición, corregida y aumentada. Julio. Tercera reimpresión. Centro de Matemáticas. Universidad Central del Ecuador, Quito.
3. Castillo C., Navas F. & Toro J.,(2010). Ejercicios de matemática básica, Quito.
4. Thomas, G; (2010). Cálculo en una variable. Décima segunda edición, Pearson Addison Wesley. México.
5. Swokowski E. & Cole J. (2007). Algebra y trigonometría con geometría analítica" Grupo Editorial Ibero América, México.
6. Arya, Lander, Ibarra (2009). Matemáticas aplicadas a la administración y a la Economía. Quinta edición. Pearson Educación. México
7. Galindo E. & Gortaire D. (2006). Matemáticas Superiores, teoría y ejercicios".Prociencia editores, Quito.
8. DemidovichB.(2000), Problemas y ejercicios de análisis matemático. Editorial Mir. Addison Wesley. México.

ISBN: 978-9942-21-780-6