1 Medida de ángulos

Saberes previos

¿Qué ángulo forman las manecillas del reloj a las 3:00, a las 6:00; a las 9:00 y a las 12:00? Haz un dibujo en cada caso.

Analiza

Un viajero observa en su brújula que debe girar 52° 24′18″ al oriente para llegar a su destino.

- ¿En qué sistema de unidades está expresada la medida de este ángulo?

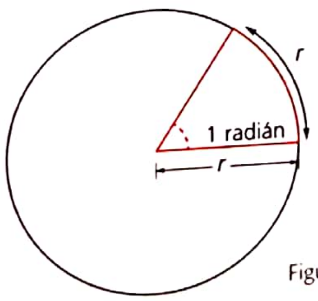

Figura 3.1

Un ángulo que gira en el sentido contrario al al movimiento de las agujas del reloj, se considera positivo, mientras que si lo hace en el sentido horario, se considera negativo. Así, un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ corresponde a $\frac{1}{4}$ de rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj y otro de $-\frac{\pi}{2}$ rota esa fracción pero en el sentido de las manecillas del reloj.

Conoce

1.1 Sistema sexagesimal

La medida del ángulo de giro de la brújula está expresada de manera precisa en el sistema sexagesimal. En este sistema, un ángulo de rotación completo se divide en 360 ángulos iguales. Cada ángulo mide un **grado** (1°) sexagesimal. Para medir ángulos más pequeños se utilizan los **minutos** (′) y los segundos (″). Si 1° se divide en 60 ángulos iguales, cada uno de ellos equivale a 1′; y si 1′ se divide en 60 ángulos iguales, cada uno de ellos equivale a 1″. Así, la medida expresada es de 52 grados, 24 minutos y 18 segundos.

En el **sistema sexagesimal** se manejan las siguientes equivalencias.

$$1° = \left(\frac{1}{360}\right)^{\circ} \quad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} \quad 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ} \quad 1° = 60' \quad 1' = 60''$$

Ejemplo 1

La expresión decimal de la medida 52° 24′ 18″ se puede obtener como sigue.

$$52° \, 24' \, 18''$$
$$= 52° + 24 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} + 18 \cdot \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$$ ← Se multiplican los minutos por $\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ y los segundos por $\left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$.

$$52° + 0{,}4° + 0{,}005°$$ ← Se realizan las sumas parciales.

Por lo tanto, 52° 24′ 18″ = 52,405°.

1.2 Sistema cíclico

Si se toma cualquier circunferencia de radio r y se lleva esta longitud (r) sobre un arco de la misma (como se observa en la Figura 3.1) el ángulo central determinado por el arco y sus radios extremos mide **un radián**. Se simboliza como **1 rad**.

Ejemplo 2

Cuando el radio de la circunferencia es 1, la longitud de la circunferencia es 2π. Por lo anterior, la medida angular de una rotación completa es 2π rad. Observa la Figura 3.2.

$$1 \text{ rotación} = 2\pi \text{ rad} \qquad \frac{1}{2} \text{ rotación} = \pi \text{ rad} \qquad \frac{1}{4} \text{ de rotación} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

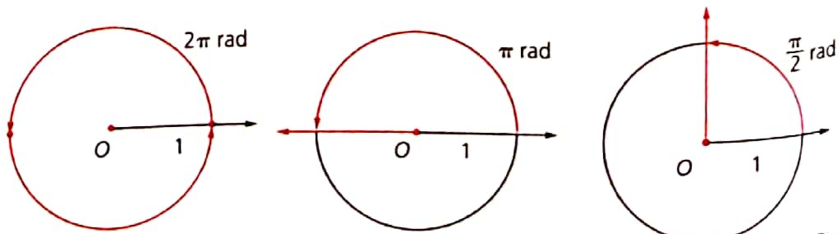

Figura 3.2

1.3 Relación entre grados sexagesimales y radianes

Como la medida angular de una rotación completa es de 360° o 2π radianes, la relación entre grados y radianes está dada por la proporción:

$$\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = \frac{180°}{\pi \text{ rad}}$$

Para expresar grados en radianes se multiplica por $\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)$.

Para expresar radianes en grados se multiplica por $\left(\frac{180°}{\pi \text{ rad}}\right)$.

Ejemplo 3

Para expresar 135° en radianes, se multiplica por $\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)$.

$$135° \cdot \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) = \frac{135° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \frac{3}{4}\pi \text{ rad}$$

Es decir, $135° = \frac{3}{4}\pi$ rad.

1.4 Longitud de arco

Es posible hallar la longitud de un arco S si se conoce la amplitud del ángulo θ (en radianes) que lo subtiende y la medida del radio r (Figura 3.3). Para esto, se utiliza la expresión:

$$S = \theta r$$

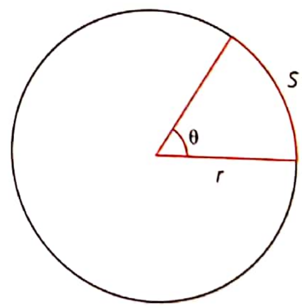

Figura 3.3

Al despejar cada variable, se obtienen expresiones para hallar otras medidas.

$$\theta = \frac{S}{r} \quad \text{y} \quad r = \frac{S}{\theta}$$

Ejemplo 4

¿Qué distancia ha recorrido un patinador que se mueve desde A hasta B en la pista circular representada en la Figura 3.4, si describe un ángulo de 108°?

Si la distancia recorrida por el patinador es la longitud del arco S, que corresponde al ángulo θ, entonces:

Se expresa el ángulo en radianes.

$$108° \cdot \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) = \frac{3}{5}\pi \text{ rad}$$

Se calcula la longitud de arco.

$$S = \theta r$$

$$S = \frac{3}{5}\pi \cdot 25 = 15\pi$$

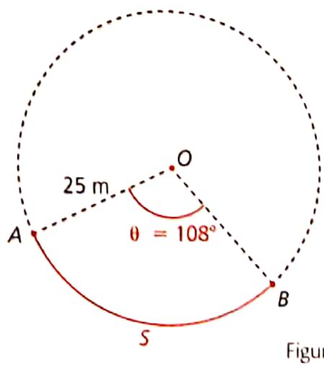

Figura 3.4

Lo anterior significa que la distancia recorrida por el patinador es 15π m o 47,12 m, aproximadamente.

6 Observa la Figura 3.7. Luego, escribe las medidas faltantes en grados y radianes.

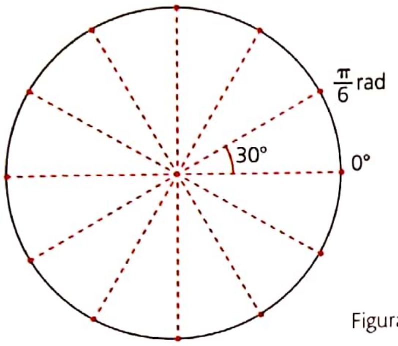

Figura 3.7

7 Lee y soluciona.

Un ángulo en **posición normal** es un ángulo representado en un sistema de coordenadas, donde su vértice es el origen y su lado inicial coincide con el semieje positivo X, tal como muestra la Figura 3.8.

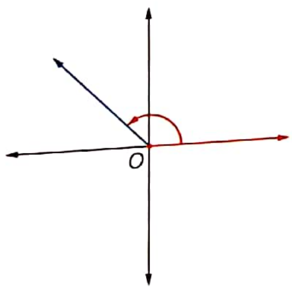

Figura 3.8

Representa los siguientes ángulos en posición normal.

a. $42°$
b. $-135°$
c. $135°$
d. -5 rad
e. $\frac{3}{2}\pi$ rad
f. $\frac{5}{9}\pi$ rad
g. $\frac{7}{4}\pi$ rad
h. $-\frac{5}{4}\pi$ rad

Ejercitación

8 Encuentra la longitud de arco correspondiente al radio y al ángulo dados en cada caso.

a. $r = 2$ cm; $\theta = \pi$ rad
b. $r = 5$ m; $\theta = 2\pi$ rad
c. $r = 28$ m; $\theta = \frac{5}{9}\pi$ rad
d. $r = 6$ km; $\theta = \frac{5}{9}\pi$ rad

9 Halla la medida del radio que corresponde a la longitud de arco y al ángulo dados en cada caso.

a. $s = 1{,}2$ m; $\theta = \pi$ rad
b. $s = 28$ m; $\theta = \frac{7}{2}\pi$ rad
c. $s = 2$ cm; $\theta = 3\pi$ rad
d. $s = 7$ km; $\theta = \frac{8}{6}\pi$ rad

10 Halla la medida del ángulo a partir de los datos que se dan a continuación.

a. $r = 5$ cm; $s = 2{,}8$ cm
b. $r = 8{,}1$ m; $s = 9{,}8$ m
c. $r = 10$ m; $s = 5{,}5$ m
d. $r = 9$ km; $s = 0{,}1$ km

Resolución de problemas

11 La rueda delantera de una moto mide 50 cm de diámetro. ¿Qué distancia ha recorrido la moto si la rueda ha dado 120 vueltas? ¿Cuántas vueltas ha dado la rueda trasera si su diámetro es de 60 cm?

12 Tres barcos A, B y C navegan por el océano Atlántico como se observa en la Figura 3.9.

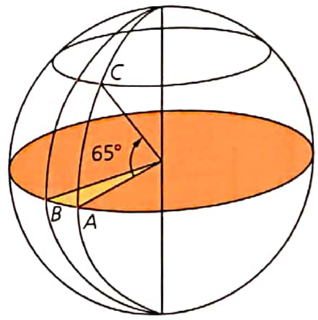

Figura 3.9

a. ¿Cuál es la distancia entre el barco A y el barco C si el diámetro de la Tierra mide 12 800 km?

b. ¿Cuál es la medida angular entre los barcos A y B si la distancia entre ellos es de 1 800 km?

Evaluación del aprendizaje

Un aspersor es un dispositivo mecánico que gira sobre un mecanismo que le produce un movimiento de giro de un sexto de rotación. Su uso es básicamente para riego de césped o cultivos.

a. ¿Cuántos grados sexagesimales corresponden a un sexto de rotación?

b. ¿A cuántos radianes corresponde un sexto de rotación?

c. Si el chorro de agua que lanza el aspersor es de 16 m, ¿cuál es la longitud del arco correspondiente?

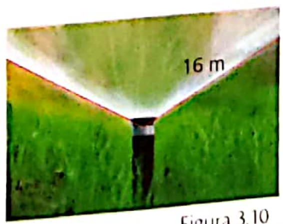

Figura 3.10