**LÓGICA Y CONJUNTOS**

**OBJETIVOS:**

1. Analizar proposiciones simples y compuestas, y hallar el valor de verdad de las proposiciones.
2. Distinguir las proposiciones abiertas y las proposiciones cerradas.
3. Establecer algunas relaciones entre los conectivos y las operaciones

**INTRODUCCIÓN:**

En esta unidad se trata de presentar la lógica y los conjuntos como un lenguaje unificador en el estudio de la matemática. Es importante tener en cuenta cómo la lógica nos sirve también para ayudar a las demás ciencias a formular razonamientos válidos, aplicando un lenguaje sim­bólico y una serie de reglas para manejarlo.

## PROPOSICIONES SIMPLES Y COMPUESTAS:

En tus últimos cursos de Aritmética en la escuela primaria, ya conociste algunos con­ceptos de lógica y sabes que esta ciencia ayuda a las demás a formular razonamientos válidos, aplicando un lenguaje simbólico y una serie de reglas para manejarlo.

Además, ya usaste proposiciones (las expresiones que pueden ser calificadas como falsas o como verdaderas) y sabes que, así como la aritmética opera con números, la lógica opera con proposiciones.

Por ejemplo:

Si tenemos dos proposiciones, las cuales a lo largo de este texto se escribirán entre comillas, sin embargo, existen textos en los que no se utiliza esta notación:

* p: "Está lloviendo"
* q: "Hay mucho tráfico"

Las simbolizamos con las letras minúsculas: p, q y podemos operar con ellas para obtener una nueva proposición:

* p y q: "Está lloviendo y hay mucho tráfico".

Así decimos que operar con proposiciones significa que, a partir de proposiciones dadas, podemos obtener una nueva proposición; esta nueva proposición recibe el nombre de proposición compuesta; por ejemplo, son proposiciones compuestas:

* p y q: "Está lloviendo y hay mucho tráfico"
* p o q: "Está lloviendo o hay mucho tráfico "
* Si p entonces q: "Si está lloviendo, entonces hay mucho tráfico"
* q si y sólo si p: "Está lloviendo si y sólo si hay mucho tráfico"
* no p: "No está lloviendo"
* no q: "No hay mucho tráfico"

Recuerda que las proposiciones tienen sólo un valor de verdad: fal­so que simbolizamos F o 0, o verdadero, que simbolizamos V o 1

* m: "2 + 3 = 5"

m es verdadera.

* n: "5<3"

n es falsa

El valor de verdad de las proposiciones compuestas depende de la calificación de las proposiciones simples que la forman, por ejemplo:

1. m o n

* m es verdadera.
* n es falsa
* m o n es verdadera

1. m y n

* m es verdadera
* n es falsa
* m y n es falsa

### Práctica lo aprendido:

1. Si tenemos las proposiciones:

* m: "Brasil es un país productor de café"
* n: "Venezuela produce petróleo"
* r: "Cuba es un país productor de caña de azúcar"
* s: "México es un país productor de plata"

Traduce las siguientes proposiciones a un lenguaje común:

1. m o s
2. n o s
3. r y s
4. Considera la información del siguiente cuadro, y de acuerdo con ella califica las proposiciones siguientes, escribiendo (V) a las verdaderas y (F) a las falsas.

Tabla 1: Juegos Panamericanos 1975

| País | Oro | Plata | Bronce | Total |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Estados Unidos | 118 | 83 | 37 | 247 |
| Cuba | 57 | 46 | 31 | 134 |
| Canadá | 18 | 34 | 39 | 91 |
| México | 9 | 13 | 38 | 60 |
| Brasil | 6 | 14 | 23 | 43 |

1. Brasil obtuvo 30 medallas de oro.
2. Cuba obtuvo 134 medallas en total.
3. Brasil obtuvo menos de 44 medallas y más de 42.
4. Cuba obtuvo el segundo lugar por el total de medallas.
5. México obtuvo el cuarto lugar por el total de medallas.
6. México obtuvo más medallas de bronce que Cuba.
7. Todos los países del cuadro son americanos
8. 34 > 60
9. 43 < 91
10. Escribe (S) en el paréntesis que corresponda a las proposiciones simples y (C) a las compuestas.
11. ( ) Si es país del cuadro, entonces es americano.
12. ( ) México obtuvo 9 medallas de oro y 38 de bronce.
13. ( ) Los países que participan en los Juegos Panamericanos son latinoa­mericanos o norteamericanos.
14. ( ) Si es país americano, entonces participa en los Juegos Panamerica­nos.
15. ( ) Canadá obtuvo 34 medallas de plata.
16. ( ) Se obtiene medalla de oro si y sólo si se gana el primer lugar.
17. ( ) 38>31
18. ( ) 43 < 44 y 43 > 42
19. ( ) Cuba fue el país latinoamericano que obtuvo mayor número de medallas.

A las proposiciones como p: "Está lloviendo", q, m, n,. . . etc., las llamamos proposiciones simples. A las nuevas proposiciones formadas con las simples: p y q, p o q, si p entonces q, p sí y sólo sí q . . . etc., las llamamos proposiciones compuestas.

Son ejemplos de proposiciones simples:

* a: "El río Nilo está en África"
* b: "Los egipcios fueron los primeros en usar símbolos para repre­sentar los números"
* c: "2 + 3= 5"
* d: "5>3"

Son ejemplos de proposiciones compuestas:

* a y b: "El río Nilo está en África y los egipcios fueron los primeros en usar símbolos para representar los números"
* c o d: "2 + 3 = 5 ó 5 >3"
* Si c entonces d: "Si 2 + 3=5 entonces 5 > 3"

1. Resuelve el ejercicio siguiente:
2. Escribe cinco proposiciones simples.
3. De acuerdo con las proposiciones simples que escribiste, fórmula ahora las proposiciones compuestas siguientes.

* a y b:
* a o d:
* Si c entonces d:
* d si y sólo si e:
* d y e:

1. Observa las proposiciones que formulaste en el ejercicio anterior. ¿Cómo formulaste las proposiciones compuestas?

Como ves, las proposiciones compuestas se forman con proposiciones simples y unas partículas gramaticales que las unen, por ejemplo:

* "Pedro estudia y trabaja". Se forma con las proposiciones simples: Pedro estu­dia, Pedro trabaja y con la partícula "y".

1. Completa:
2. "Pedro estudia o trabaja":

* Se forma con las proposiciones simples:
* Con la partícula:

1. "Si está lloviendo, entonces hay mucho tráfico":

* Se forma con las proposiciones simples:
* Con las partículas:

A las partículas "y" "o" "si... entonces" "si y sólo si" que usamos para for­mar proposiciones compuestas, se les llama conectivos.

1. Si tenemos las proposiciones:

* a: "Los egipcios vivieron a orillas del Nilo"
* b: "El río Nilo está en África"
* c: "La egipcia fue una de las primeras culturas que se conocen"
* p: "2 es número par"
* q: "2 es primo"

Escribe en lenguaje común:

1. a y b:
2. Si b entonces a:
3. P o q:
4. Si p entonces q:
5. Selecciona las proposiciones simples que escribiste, y los conec­tivos que empleaste.

## SÍMBOLOS PARA LAS PROPOSICIONES:

Como afirmamos al principio, en la lógica se emplea un lenguaje simbólico, como es el escribir letras minúsculas en lugar de las proposiciones completas.

En lugar de los conectivos y, o, . . . etc., también usamos signos convencionales:

| Conectivo | Símbolo |
| --- | --- |
| Y |  |
| O |  |
| Sí . . . entonces |  |
| Si y sólo si |  |
| No |  |

Tabla 2: Conectivos Lógicos

Así que:

* p y q, se escribe p  q
* p o q, se escribe p  q
* Si p, entonces q, se escribe p  q
* p si y sólo si q, se escribe p  Q

O sea que las proposiciones:

1. "Juan estudia y trabaja", se puede traducir como: p  q
2. "Juan estudia o trabaja", se puede traducir como: p  q
3. "Si Juan estudia, entonces trabaja": p  q
4. "Juan estudia si y sólo si trabaja": p  q

### Práctica lo aprendido

1. Escribe tres proposiciones simples:
2. r
3. s
4. t
5. De acuerdo con las proposiciones que escribiste, traduce:
6. r  s
7. r  s
8. s  t
9. t  j
10. r  s
11. s  r
12. r  t
13. r  s

## LA CONJUNCIÓN

En la “Institución Educativa La Sagrada Familia", se organizaron varios clu­bes deportivos y artísticos; para ingresar a cada uno se deben cumplir ciertos requisitos, que se dieron a conocer en el periódico mural de la escuela.

| CLUBES | REQUISITOS |
| --- | --- |
| Basquetbol | * Ser alumno del colegio * Grado octavo * Medir más de 1,60 |
| Danza Regional | Sin requisitos adicionales. |

Tabla 3: Periódico Mural

Varios de los muchachos se han animado a inscribirse en el club de basquetbol:

1. Arturo que es alumno de 8º. y mide 1,67
2. Beto que es alumno de 8º. y mide 1,59
3. Carlos que es alumno de 7º. y mide 1,63
4. Daniel que es alumno de 7º. y mide 1,60

¿Crees que acepten a los cuatro?

Observa que cada una de las expresiones anteriores es una proposi­ción compuesta, en la que hemos usado el conectivo "y".

Pues bien, a estas proposiciones compuestas las llamamos: **conjun­ciones**.

Son conjunciones:

* Arturo es alumno de 8º. y mide 1,67
* Beto es alumno de 8º. y mide 1,59
* Carlos es alumno de 7º. y mide 1,63
* Daniel es alumno de 7º. y mide 1,60

¿Cuál de los cuatro amigos será aceptado en el club de basquetbol? de acuerdo con las condiciones:

Llena la tabla siguiente, escribiendo si cada alumno cumple con los requisitos:

* p(x): "x es alumno de 8º”
* q(x): "x mide más de 1,60"

p(x)  q(x)

Tabla 4: Conjunción de proposiciones.

| Nombre | p(x) | q(x) | p(x)q(x) |
| --- | --- | --- | --- |
| Arturo |  |  |  |
| Beto | sí | no |  |
| Carlos |  |  |  |
| Daniel |  |  |  |

Observa en la tabla que el valor de verdad de una conjunción depen­de de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman. En uno de los ejemplos anteriores teníamos las proposiciones:

* p: "Está lloviendo"
* q: "Hay mucho tráfico"

p(x)  q(x): "Está lloviendo y hay mucho tráfico"

Observa las descripciones siguientes:

1. Hay mucho trancón. Está lloviendo

* p: Verdadera
* q: Verdadera
* p(x)  q(x): Verdadera

En los ejemplos anteriores podemos observar que:

Una conjunción es verdadera sólo si las dos proposiciones que la forman son verdaderas; en cualquier otro caso es falsa.

Si representamos los valores de verdad mediante los símbolos 1 y 0 se puede determinar la siguiente:

Tabla 5: Disyunción

| P | q | p(x)  q(x) |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Si aplicamos la tabla presentada, podemos calificar junción, por ejemplo:

Si tengo la conjunción:

m  n: "La religión egipcia era politeísta y Amón es un dios azteca". Analizo los valores de m y de n:

* m: Verdadero
* n: Falsa

Entonces m  n: Falso

De acuerdo con el segundo renglón de la tabla de la conjunción:

| m | n | m  n |
| --- | --- | --- |
| 1 | 0 | 0 |

Tabla 6: Valor de la conjunción

### Practica lo aprendido:

1. Observa la siguiente tabla:

Tabla 7: Producción mundial de café

| PAÍS | CONTINENTE | TONELADAS |
| --- | --- | --- |
| Brasil | América | 600 |
| Colombia | América | 408 |
| Costa de Marfil | África | 204 |
| Uganda | África | 179 |
| Angola | África | 177 |
| México | América | 108 |
| Indonesia | Asia | 111 |
| Salvador | América | 104 |

a. De acuerdo con las condiciones anotadas, determina el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

p: "El primer país productor de café, es americano"

q: "Los países africanos producen más de 700 toneladas de café"

r: "México ocupa el sexto lugar como país productor de café"

s: "Los países asiáticos no producen café"

b. Califica las proposiciones compuestas (usa tu tabla de verdad)

* p  q
* p  r
* r  q
* p  s
* s  r
* q  s

1. Escribe las proposiciones que se indican en un lenguaje común, tomando como base las proposiciones p, q, r, del cuadro de las medallas de los Juegos Paname­ricanos de 1975.

* p: "México obtuvo 1 3 medallas de plata"
* q: "México obtuvo 39 medallas de bronce"
* r: "México obtuvo 200 medallas en total"

1. p  r
2. q  r:
3. r
4. q  r
5. p q
6. q  r
7. Identifica las proposiciones simples y los conectivos que localices en el párrafo siguiente:

México conquistó medalla de plata en basquetbol femenino y medalla de oro en waterpolo. En fútbol luchó por la medalla de oro o la de plata. Si hubiera ganado a Cuba en béisbol entonces hubiese obtenido medalla de bronce.

## LA CONJUNCIÓN Y LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Volvamos a nuestro ejemplo anterior: el club de basquetbol.

Si tenemos como universo los alumnos de la “Institución Educativa La Sagrada Familia de la ciudad de Ibagué, sabemos que para formar el club de basquetbol tenemos las proposiciones abiertas:

* p(x): "x es alumno de 8º."
* q(x): "x mide más de 1,60"

A partir de esas proposiciones se determinan los conjuntos:

P = {x tales que x es alumno de 8º}

Q = {x tales que x mide más de 1,60}

Que gráficamente estarían representados:

Imagen 1: Diagrama de requisitos.

Diagrama rectangular con los conjuntos de los requisitos para inscripción en baloncesto.

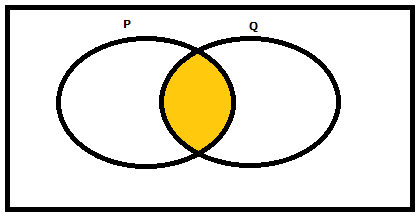

**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior los conjuntos P y Q, los cuales comparten una región. En el conjunto P dice Alumnos de 8 y en el conjunto Q dice Alumnos que miden más de 1,60. La región común está en blanco.

Ahora bien, si tenemos la conjunción:

p y q: x / x es alumno de 8º y mide más de 1,60, determinamos la intersección.

P  Q = {x / x es alumno de 8º y mide más de 1,60}, que en el dia­grama sería:

Imagen 2: Intersección.



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior con los conjuntos P y Q, los cuales comparten una región. La región común está rellena de color amarillo y corresponde a la intersección de los conjuntos.

Observa que a partir de la conjunción de dos proposiciones abier­tas, determinamos la intersección de los dos conjuntos generados por las proposiciones correspondientes. Recuerda que la definición de intersección es:

P  Q = {x / x  P y x  Q}

### Práctica lo aprendido

1. Si tenemos como Universo los países de la tabla:

| PAÍS | CONTINENTE | TONELADAS |
| --- | --- | --- |
| Brasil | América | 600 |
| Colombia | América | 408 |
| Costa de Marfil | África | 204 |
| Uganda | África | 179 |
| Angola | África | 177 |
| México | América | 108 |
| Indonesia | Asia | 111 |
| Salvador | América | 104 |

Tabla 8: Producción de café

Y las proposiciones abiertas

* m(x) = {x / "x es un país americano”}
* n(x) = {x / "x es un país africano”}
* p(x) = {x / "x produce más de 200 mu toneladas de café"}
* q(x) = {x / "x produce menos de 200 mil toneladas de café”}

1. Determina los conjuntos que se forman a partir de esas proposiciones abiertas.

* M = { }
* N = { }
* P = { }
* Q = { }

1. Forma las conjunciones siguientes y escríbelas en tu cuaderno:

* m (x)  p (x): x es un país americano y produce más de 200 toneladas de café
* m(x)  q(x):
* n(x)  q(x):
* n(x)  p (x):
* p(x)  q(x);

1. Forma las intersecciones:

* M  P = { }
* M  Q = { }
* N  P = { }
* N  Q = { }
* P  Q = { }

1. Representa gráficamente:

* M  N
* N  Q
* M  P
* M  Q

1. Completa la tabla de verdad de la conjunción:

| p | q | p  q |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 | ? |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | ? |
| 0 | 0 | ? |

Tabla 9: Conjunción.

1. Califica las siguientes proposiciones escribiendo (0) a las falsas y (1) a las verda­deras de acuerdo con los informes presentados en el cuadro.

Algo de historia

Tabla 10: Presidentes de Colombia desde 1934 a 1962

| Periodo | Presidente |
| --- | --- |
| 1934 – 38 | Alfonso López Pumarejo |
| 1938 – 42 | Eduardo Santos |
| 1942 - 45 | Alberto Lleras Camargo |
| 1945 – 46 | Mariano Ospina Pérez |
| 1946 – 50 | Laureano Gómez |
| 1950 – 53 | Gustavo Rojas Pinilla |
| 1953 – 57 | Junta Militar |
| 1957 – 58 | Alberto Lleras Camargo |
| 1958 - 62 | Guillermo León Valencia |

* p: "Alfonso López Pumarejo fue presidente de Colombia"
* q: "Alfonso López Pumarejo gobernó de 1945 al 50"
* r: "Laureano Gómez era presidente en 1938"
* s: "Guillermo León Valencia era presidente en 1960"
* t: "Alberto Lleras Camargo era presidente en 1954"
* u: "Eduardo Santos gobernó de 1934 al 38"
* p  q: "Alfonso López Pumarejo fue presidente de Colombia y gobernó de 1945 al 50"
* r  s: "Laureano Gómez era presidente en 1938 y Guillermo León Valencia en 1960"
* t  u: "Alberto Lleras Camargo presidente en 1954 y Eduardo Santos gobernó de 1934 al 38"
* t  r: "Alberto Lleras Camargo era presidente en 1938 y Laureano Gómez era presidente en 1938"

1. En un pizarrón colocado a la entrada de una escuela técnica se especifica:

REQUISITOS DE INGRESO:

* Certificado de básica secundaria
* Cuota de $85000,=

Las siguientes personas estaban interesadas en ingresar, pero cada una estaba en las condiciones especificadas en el cuadro:

Tabla 11: Interesados en Ingresar

| Nombre | Certificado de básica secundaria | $85000 |
| --- | --- | --- |
| Luis | Si tiene | No tiene |
| Miguel | No tiene | Si tiene |
| Ezequiel | No tiene | No tiene |
| Catalina | Si tiene | Si tiene |
| Aurora | Si tiene | No tiene |
| Flora | No tiene | Si tiene |
| Gabriela | Si tiene | Si tiene |

1. De acuerdo con la información escribe los conjuntos que se generan a partir de las proposiciones abiertas y completa:

* m (x): "x tiene certificado básica secundaria"

M = {x / x tiene certificado de básica secundaria}

M = {Luis, Gabriela, Catalina, Aurora}

* n (x): "x tiene para pagar la cuota de $85000,="

N = { }

* m (x)  n (x):
* n (x)  m (x):

1. ¿Qué personas se pudieron inscribir en la escuela?

## LA DISYUNCIÓN

El club coral de la escuela secundaria "Simón Bolívar" ha ganado un concurso entre todas las secundarias de la ciudad; el premio consiste en un viaje a Centroamérica, para cantar en las escuelas de otros países.

Para gestionar el pasaporte respectivo, en el Ministerio de Relaciones Exteriores les pidieron acta de nacimiento o certificado de primaria: Al­fredo, Juan y Pedro, sólo tienen acta de nacimiento; Julio, Antonio, César y David, tienen sólo certificado de primaria; Emilio, Francisco y Javier tienen acta de nacimiento y certificado de primaria; Pablo y Raúl, no tienen ninguno de los dos documentos.

* ¿A quiénes les darán el pasaporte?

Si traducimos los requisitos a un lenguaje simbólico, tendríamos:

Una persona obtiene pasaporte si:

* "x tiene acta de nacimiento"
* "x tiene certificado de primaria"

"x tiene acta de nacimiento o tiene certificado de primaria" es una proposición abierta compuesta en la que se utiliza el conectivo "o", "".

p(x)q(x) es una proposición abierta compuesta en la que se utili­za el conectivo "o","".

A estas proposiciones las llamamos **disyuncio­nes**.

Formemos las siguientes proposiciones:

* Alfredo tiene acta de nacimiento o certificado de primaría.
* César tiene acta de nacimiento o certificado de primaria.
* Emilio tiene acta de nacimiento o certificado de primaria.

A estas proposiciones las llamamos disyunciones.

Completa, en tu cuaderno, la siguiente tabla de acuerdo con los datos que se dieron anteriormente, para saber si los siguientes alumnos obtendrán su pasaporte.

| Nombre | P(x) | q(x) | p (x)  q (x) |
| --- | --- | --- | --- |
| Juan | si |  |  |
| Antonio |  |  |  |
| Javier |  |  |  |
| Raúl |  |  |  |

Tabla 12: Condiciones de alumnos.

Observa en la tabla que completaste, cómo una disyunción es verda­dera, si al menos una de las proposiciones que la forman, lo es:

Si Juan = a

* p(a)  q(a): "Juan tiene acta de nacimiento o certificado de primaria"

p(a): 1

q(a): 0

p(a)  q(a): 1

Si Antonio = b

* p (b)  q (b): "Antonio tiene acta de nacimiento o certificado de pri­maria".

p (b): 0

q (b): 1

p (b)  q (b): 1

Si Javier = c

* p(c)  q(c): "Javier tiene acta de nacimiento o certificado de prima­ria".

P(c): 1

q(c): 1

p(c)  q(c): 1

Para Raúl = d

* p (d)  q (d): "Raúl tiene acta de nacimiento o certificado de prima­ria".

p (d): 0

q (d): 0

p (d)  q (d): 0

En los ejemplos anteriores se observa que:

Una disyunción es falsa sólo si las dos proposiciones que la forman, lo son.

La tabla de verdad de la disyunción sería:

| p | q | p  q |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Tabla 13: Disyunción

Compara la tabla de la conjunción y de la disyunción.

* ¿Son iguales?
* ¿Cuáles son sus diferencias?

Si quieres entrar a un club de fútbol, es igual que te exijan: ¿Ser mayor de 12 años o tener el uniforme o Ser mayor de 12 años y tener el uniforme?

Explica por qué no son iguales las situaciones:

* ¿Cuál es la más ventajosa para ti?

La tabla de verdad anterior nos sirve para determinar el valor de ver­dad de cualquier disyunción que tengamos, por ejemplo:

Si tenemos las proposiciones:

s  t: "Julia vende arepas o tortas" y analizamos los valores de ver­dad de s y de t, tenemos:

* s: 0
* t: 1
* s  t: 1

De acuerdo con el tercer renglón de la tabla de verdad anterior:

Tabla 14: Disyunción de s y t

| s | t | s  t |
| --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 1 |

### Práctica lo aprendido

1. Califica las proposiciones siguientes, de acuerdo con los datos que se te proporcionan y con la tabla de verdad correspondiente, escribiendo V o F según corresponda.

* P = {x / x es primo}

P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …}

* C= {x / x es compuesto}

C= {4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15...}

1. m: "7 es número compuesto"
2. n: "9 es número compuesto"
3. r: "2 es número primo"
4. s: "2 es número par"
5. t: "39 es número primo"
6. u: "39 es número compuesto"
7. Determina el valor de verdad de:
8. m  n
9. n  r
10. s  r
11. n  u
12. n  r
13. m  n
14. n  r
15. s  t
16. n  u
17. n  r
18. m  r
19. n  m
20. m  n
21. n  m
22. m  m
23. ¿Cómo son los valores de m  n y de n  m?
24. ¿Cómo llamarías a esta propiedad de la disyunción?
25. Para entrar a bailar en una mini teca en un determinado colegio se imponen una de las siguientes condiciones:

* p: "El alumno debe ser de un curso de grado mayor o igual a 6º."
* q: "El alumno debe tener más de 11 años"
* p  q: "El alumno debe ser de grado mayor o igual a 6º o tener más de 11 años de edad"

Completar la tabla de acuerdo a las condiciones citadas para los alumnos dados:

Tabla 15: Preinscritos a basquetbol

| Alumno | Curso | Edad | Si puede entrar |
| --- | --- | --- | --- |
| Alma | 7 | 13 | Sí |
| Bertha | 6 | 10 |  |
| Juan | 5 | 11 |  |
| Carlos | 5 | 9 |  |

Tabla 16: Disyunción según datos.

| p | q | p  q |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 |  |
|  | 1 |  |
| 0 | 0 |  |

## LA DISYUNCIÓN LÓGICA Y LA UNIÓN DE CONJUNTOS

Hemos estudiado en Ciencias Naturales que los cuerpos se electrizan por frotamiento y que la carga eléctrica adquirida puede ser positiva o nega­tiva.

Que los objetos de vidrio adquieren carga positiva y que los de plás­tico adquieren negativa.

Ahora bien, si nuestro universo son los objetos siguientes:

1. Peine
2. Esfero
3. Regla
4. Vaso de vidrio
5. Mesa de ping pong
6. Pelota de tenis
7. Copa de vidrio
8. Lápiz
9. Pipeta
10. Balón aforado

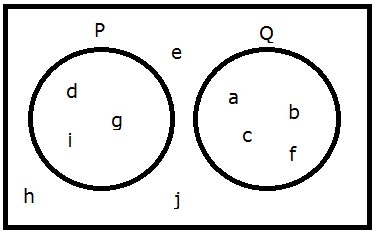
y tenemos las proposiciones abiertas:

* p(x): "x adquiere carga positiva al ser frotado"
* q(x): "x adquiere carga negativa al ser frotado"

Podemos determi­nar los conjuntos:

* P = {d, g, i}
* Q = {a, b, c, f}

Imagen 7: Diagrama de Conjuntos P y Q



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior con los conjuntos P y Q, los cuales no comparten una región. En el conjunto P están las letras d, g, i y en el conjunto Q las letras a, b, c, f. Externo a los conjuntos P y Q pero al interior del diagrama se encuentran las letras e, h, j.

Ahora bien, si tenemos la disyunción: p(x)  q(x): "x adquiere car­ga negativa o positiva al ser frotado" tendríamos el conjunto:

P  Q = {a, b, c, d, f, g, i}

Puesto que la unión de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al primer conjunto o al segundo conjunto:

A  B = {x / x  A  x  5}

El conjunto A  B es el conjunto de los elementos x tales que x per­tenece al conjunto A, o x pertenece al conjunto B.

Observa en el diagrama, que los elementos que hacen verdadera la disyunción p(x)  q(x) pertenecen al conjunto P  Q, por ejemplo:

* p(a)  q(a): "El peine adquiere carga positiva o negativa al ser fro­tado"

p: 0

q: 1

p  q: 1

Así que: a pertenece a P  Q

* p(h)  q(h): "La silla adquiere carga positiva o negativa al ser frota­da"

p: 0

q: 0

p  q: 0

Así que:

* h no pertenece a P  Q

Así, podemos afirmar que:

Una proposición abierta disyuntiva de la forma p(x)  q(x) genera la unión de los conjuntos correspondientes.

### Práctica lo aprendido

De acuerdo con los datos siguientes, resuelve los ejercicios (1 al 4) propuestos:

Tabla 17: Represas más grandes del mundo.

| NOMBRE | PAÍS | VOLUMEN EN Hm3 |
| --- | --- | --- |
| Tarbella | Pakistán | 149961 |
| Hort. Peck | E. U. | 91000 |
| M angla | Pakistán | 82800 |
| Oahe | E. U. | 70300 |
| Gardiner | Canadá | 65600 |
| Oraville | E. U. | 61397 |
| San Luis | E. U. | 59639 |
| Nurek | U.R.S.S. | 58800 |
| Naga Junosagar | India | 53300 |
| Garrison | E. U. | 50845 |
| Kiev | U.R.S.S. | 44400 |

Si tenemos la proposición abierta: m(x): "x es represa de Pakistán"

1. Forma dos proposiciones lógicas falsas y dos verdaderas, y escríbelas en tu cuaderno.

Garrison es presa de Pakistán: Falsa

1. Forma los conjuntos:

* M = {x / x es represa de Pakistán}
* N = {x / x es represa de E.U.}
* O = {x / x es represa de la U.R.S.S.}
* P = {x / x es represa con un volumen mayor de 50000 Hm3 de agua}

1. Encuentra los elementos de:

* M  N = { }
* M  P = { }
* M  N = { }
* M  P = { }
* (M  P)  P = { }
* N  P = { }
* (M  P)  N = { }

1. Representa gráficamente:

* M  N
* N  P

1. Determina las disyunciones y los conjuntos que se te piden, de acuerdo con los datos del cuadro siguiente:

Tabla 18: Vitaminas Solubles en Agua

| Designación | Alimentos en que se encuentra | Requerimiento diario |
| --- | --- | --- |
| Vitamina C | Cítricos: limón, naranja, toronja, fre.sa, melón . . . | 75 mg. |
| Vitamina B1 | Cereales, huevo, plátano, manzana, berros, papas . . . | 2mg. |
| Vitamina B2 | Leche, hígado.-huevo, levadura de cerveza . . . | 2mg. |

1. m(x): "x es vitamina que se encuentra en el huevo"
2. n(x): "x es vitamina que se encuentra en la leche"
3. a(x): "x es vitamina que se encuentra en el hígado"
4. b(x): "x es vitamina de la que requerimos 2 mg diariamente"
5. a(x)  b(x):
6. m(x)  b(x):

## NEGACIÓN

Hace algunos años se suscitó una polémica acerca del descubrimiento de los restos de Cuauhtémoc al pie del altar de una pequeña iglesia en Ixcateopan. La doctora Eulalia Guzmán afirmaba que los restos encontrados habían pertenecido a Cuauhtémoc, mientras que don Alfonso Caso no estaba de acuerdo y decía que los restos encontrados no habían perte­necido a Cuauhtémoc.

Uno de los dos científicos tenía la razón, no es posible que los dos estuvieran en lo cierto, o los dos estuvieran equivocados, es decir, cuan­do tenemos una proposición:

* "Los restos encontrados en Ixcateopan pertenecieron a Cuauhtémoc" y a partir de ella, se niega:

"Los restos encontrados en Ixcateopan no pertenecieron a Cuauhtémoc".

Una de las proposiciones es verdadera, y necesariamente la otra es falsa, en el tipo de lógica que estamos estudiando aquí.

Luego, podemos decir que:

Una proposición es la negación de otra, cuando el valor de verdad de una de ellas es contrario al valor de verdad de la otra, esto es: Si la una es verdadera la otra es falsa o viceversa, y al negar una de ellas, se obtiene la otra.

Así, por ejemplo:

Si p: " es un número entero"

No p, sería: " no es un número entero"

* p: 0
* No p: 1

No p, lo simbolizamos: p

Lee con cuidado el siguiente ejemplo:

Si digo: "Mi vestido es blan­co'" y negara la proposición diciendo: "Mi vestido es negro".

Imagen 8: Vestido

Vestido de color rosa.


**Descripción Imagen:** Dibujo de un vestido en un gancho, el vestido es de color rosado.

Observa que "mi vestido es blanco" y "mi vestido es negro", son falsas, y sabemos que, si se tiene una proposición y su negación, una se­rá falsa y la otra verdadera, así que no podemos negar ". . . es blanco" con ". . . es negro". La negación de q: "Mi vestido es blanco", debe ser q: "Mi vestido no es blanco".

Como notas, para negar una proposición, se necesita usar la palabra "NO", lo que se puede hacer en diferentes formas:

* "Mi vestido no es blanco"
* "No es cierto que mi vestido sea blanco".

### Práctica lo aprendido

1. ¿Puedo negar "yo siempre voy a la escuela" con la proposición "yo nunca voy a la escuela?"

* ¿Por qué?

1. ¿Puedes negar "yo subo" con "yo bajo"?

* ¿Por qué?

1. Niega las proposiciones; escribe las negaciones:
2. m: "Pedro entra"
3. n: "Juan llora"
4. ñ: "Hoy es lunes"
5. Evaluar las siguientes proposiciones de acuerdo con los datos proporcionados.

| Producto | Toneladas |
| --- | --- |
| Trigo | 1500000 |
| maíz | 1900000 |
| arroz | 2000000 |
| caña de azúcar | 4349000 |
| algodón | 504000 |

Tabla 19: Producción de Egipto

* p: "La caña de azúcar es el principal producto agrícola de Egipto"
* q: "En Egipto se producen más de 2 millones de toneladas de arroz”
* r: "El algodón es la producción agrícola más alta en Egipto".

¿Observaste en el ejercicio anterior que el valor de no p, depende del valor de p?

Por ejemplo, si r: 0, no r: 1

* 1. Completa ahora la tabla de negación

1. Si sabes que las proposiciones a y b son verdaderas y m y n son falsas, califica las negaciones:
2. No a
3. No m
4. No b
5. No n

1. En Matemáticas, para simbolizar la negación de algunas relaciones, se acostumbra tachar el símbolo de la relación, por ejemplo:

* 3 = 3, tres igual 3
* 35, 3 no es igual a 5

1. Escribe debajo de cada relación el significado y su contrario, como en el ejemplo anterior:

* 2+3 =8
* 5 > 2
* a pertenece a M
* 8 divide a 24

1. Califica las siguientes proposiciones de acuerdo con las condiciones que se indican:

* p: "En mi pueblo hay agua potable”
* no p: "En mi pueblo no hay agua potable"

1. Ciudad con agua potable

P:

No p:

1. Ciudad sin agua potable

P:

No p:

1. Completa la tabla de verdad de la negación.

| p | No p |
| --- | --- |
| 1 |  |
| 0 |  |

Tabla 20: Negación.

1. Escriba las negaciones de las siguientes proposiciones:
2. p: "Cinco más tres es igual a siete"
3. q: "Tres por ocho es igual a veinticuatro"
4. r: "Seis divide a quince"
5. s: "Ocho es diferente a cuatro por dos"

## COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Si consideramos como universo a los equipos de fútbol profesionales del país; es decir:

1. América
2. Cali
3. Millonarios
4. Santa Fe
5. Nacional
6. Medellín
7. Quindío
8. Tolima
9. Cúcuta
10. Junior
11. Magdalena
12. Bucaramanga
13. Sporting
14. Caldas
15. Pereira

Y tenemos la proposición abierta: "x es equipo del Valle del Cauca".

A partir de esa proposición determinamos un conjunto:

Imagen 9: Conjunto J

Diagrama que contiene al conjunto J y sus elementos


**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior con el conjunto J. Al interior del conjunto J, se encuentran las letras a, b. Al interior del diagrama de Venn, pero de manera externa al conjunto J se encuentran los elementos c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o.

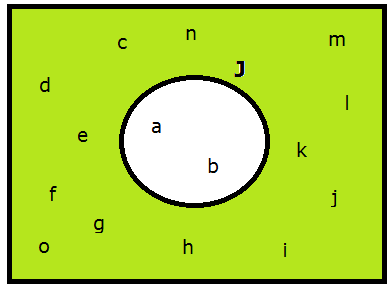
J = {x / x es equipo del Valle del Cauca}

J = {a, b}

Ahora bien, si aplicamos la negación de J(x):

"x no es un equipo del Valle del Cauca" podemos determinar un conjunto:

Imagen 10: Complemento de J



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn, al interior el conjunto J. Dentro del conjunto J, se encuentran las letras a, b. Al interior del diagrama, pero de manera externa al conjunto J se encuentran los elementos c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o. Los elementos interiores al diagrama, pero exteriores al conjunto J son el complemento de J.

J’ = {x / x no es equipo del Valle del Cauca} el que se formará con los equipos que lo complementan en relación al universo:

J’ = {c, d, e, f, g, h, i, j, k, I, m, n, o}

Así, el conjunto de equipos que no pertenecen a J porque no son del Valle del Cauca, forman el COMPLEMENTO del conjunto en el universo que consideramos (Equipos de primera división o profesional).

El conjunto complemento se simboliza J’

El complemento de un conjunto A, con respecto a un universo, es el conjunto de elementos del universo que no pertenecen a A.

A' = {x tales que x pertenece a U y x no pertenece a A}

Por ejemplo:

Si U = {x / x es alumno de nuestro grupo}

A = {x / x es mujer}

A'= {x /x no es mujer}

Imagen 11: Conjunto por género.

Complemento del conjunto de mujeres.


**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior el conjunto A. En el conjunto A, se encuentra la palabra mujeres. Al interior del diagrama, pero de manera externa al conjunto A se encuentran la letra A’ y la palabra varones, lo externo al conjunto A, es el complemento del conjunto A.

### Práctica lo aprendido

1. Determina el complemento de cada conjunto y represéntalo con un diagrama.
2. U = {x / x es dígito}

P = {x / x es primo}

1. U = {x / x es miembro de mi familia}

M = {x / x es mayor de 15 años}

1. Selecciona 5 compañeros de tu grupo y pregúntales quiénes vieron ayer algún programa de televisión, o quiénes estudiaron. Completa el cuadro anotando el nombre y la palabra Si o No según te hayan contestado.

Tabla 21: Encuesta a compañeros

| Nombre | Vio programa de TV | Estudió |
| --- | --- | --- |
| ? |  |  |
| ? |  |  |
| ? |  |  |
| ? |  |  |
| ? |  |  |

Toma como universo al conjunto formado por los compañeros que seleccio­naste y determina los conjuntos que se generan a partir de las proposiciones abiertas siguientes:

* 1. a(x): "x vio algún programa de TV"

A = {x / x vio algún programa de TV}

* 1. No a (x): "x no vio algún programa de TV"

A'= {x / x

* 1. b (x): "x estudió"

B= {x / x estudió}

* 1. No b (x): "x no estudió"

B' = {x / x…}

* 1. No a (x)  b(x): "x no vio algún programa de TV y estudió"

A'  B = { }

* 1. a(x)  no b(x): "x vio algún programa de TV y no estudió"

## LA IMPLICACIÓN

Raúl y Francisco, que son muy amigos, asistieron en las olimpiadas al partido de volibol entre U.R.S.S. y Japón. Al iniciarse el partido, Raúl dice:

"Si gana Japón, yo pago el taxi".

La situación de los dos amigos con el juego y el taxi, puede tener los siguientes resultados.

¿En cuál de todos, Raúl habría dicho una mentira? Escríbelo.

Tabla 22: Conclusión de los comportamientos.

| P | Valor de verdad | q | Valor de verdad | Conclusión |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| gana Japón (si ganó) | V | pago el taxi (Raúl pagó) | V | Raúl dijo la verdad |
| gana Japón (si ganó) | V | pago el taxi (Raúl no pagó) | F |  |
| gana Japón (no ganó) | F | pago el taxi (Raúl pagó) | V |  |
| gana Japón (no ganó) | F | pago el taxi (Raúl no pagó) | F |  |

La expresión anterior: "Si gana Japón yo pago el taxi", es una pro­posición compuesta, formada por las proposiciones:

* p: "Gana Japón"
* q: "Yo pago el taxi"

Unidos por el conectivo si... entonces, y que se puede interpretar:

1. "Si gana Japón, entonces yo pago el taxi"
2. Que gane Japón es condición suficiente para que yo pague el taxi"; o más corto:
3. "Si gana Japón, pago el taxi".

Este tipo de proposiciones son llamadas implicaciones o condiciona­les: por ejemplo:

* Si llueve, hay mucho tráfico lo que se simboliza:

p: llueve

q: Hay mucho tráfico

p  q: Si llueve, hay mucho tráfico

En las implicaciones llamamos antecedente a la primera proposición y consecuente a la segunda.

Analiza en las situaciones del ejemplo anterior, cuando es verdadera una implicación:

p  q: Si gana Japón, pago el taxi.

* Ganó Japón y Raúl pagó el taxi: Raúl ha dicho la verdad.
* Ganó Japón y Raúl no pagó el taxi: Raúl ha dicho una mentira.
* No ganó Japón y Raúl pagó el taxi: En este caso, Raúl es esplén­dido, pero no mentiroso, porque él no había advertido qué haría si Japón perdía.
* No ganó Japón y Raúl no pagó el taxi; Raúl ha dicho la verdad.

Observa que:

Una implicación o proposición condicional, es falsa, sólo cuando el an­tecedente es verdadero y el consecuente falso, en los otros casos es verdadera.

De acuerdo con lo anterior, llena la tabla de verdad de la implica­ción:

p  q: Si llueve, hay mucho tráfico.

Tabla 23: Implicación

| P |  | q |  | p  q | p | q | p  q |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Llueve | V | hay mucho tráfico | V | V | 1 | 1 | 1 |
| Llueve | V | hay mucho tráfico | F |  | 1 | 0 |  |
| Llueve | F | hay mucho tráfico | V |  | 0 | 1 |  |
| Llueve | F | hay mucho tráfico | F |  | 0 | 0 |  |

Si tenemos una proposición condicional, podemos saber su valor de verdad, aplicando la tabla de verdad, por ejemplo:

* a  b: "Si 8 es par, su cuadrado es par"

a: Verdadera

b: Verdadera

a  b: Verdadera

* m  n: "Si 2 es un número primo, entonces es impar."

m: Verdadera

n: Falsa

m  n: Falsa

* r  s: "Si México es país europeo, entonces pertenece al continente americano".

r: falso

s: Verdadera

r  s: Verdadera

* t  u: "Si Santiago es capital de Argentina, Domingo Perón fue chileno".

t: falso

u: Falso

t  u: Verdadera

Lee cuidadosamente las siguientes implicaciones y piensa cuándo son verdaderas en todos los casos en que se apliquen:

* Si x es antioqueño, entonces es colombiano.
* Si x es colombiano, entonces es antioqueño.
* Si x es alumno de 6o. A, es alumno de la secundaria.
* Si x es alumno de la Secundaria, es alumno de 6o. A.
* Si x es jugador del América, es futbolista.
* Si x es futbolista, es jugador del América.

Analicemos el primer ejemplo:

"x es antioqueño" "x es colombiano"

Veamos cuál de las implicaciones anteriores: p  q o q  p, es ver­dadera en cualquier caso en que se aplique:

Si tenemos la proposición abierta dentro del universo de todos los habitantes del mundo.

"x es colombiano" determinamos un conjunto:

Q = {x/x es colombiano} y lo representamos en un diagrama:

Imagen 12: Subconjunto

Representación gráfica de un conjunto con un subconjunto al interior de este.


**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior con el conjunto Q. El conjunto Q. El conjunto Q es un subconjunto.

Ahora veamos la otra proposición: "x es antioqueño" determinamos el conjunto:

P = {x/x es antioqueño} ¿Cómo lo representaríamos?

Imagen 13: Subconjunto de un subconjunto

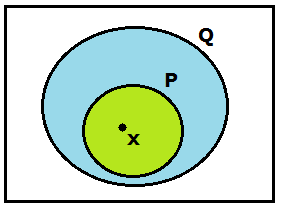
Representación gráfica del subconjunto de un subconjuntode un conjunto.
 

**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior el conjunto Q. En el conjunto Q, se encuentra el conjunto P, el conjunto P es subconjunto del conjunto Q, y el conjunto Q es un subconjunto.

Puesto que los antioqueños son parte de los colombianos.

Así que si tenemos un elemento x que esté situado dentro de P:

Imagen 14: Elemento de un subconjunto de un subconjunto de un conjunto.



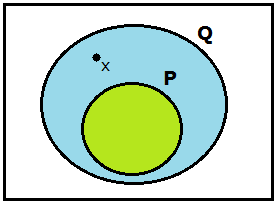
**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior el conjunto Q. En el conjunto Q, se encuentra el conjunto P, al interior de P está la letra x. x es un elemento del conjunto P, que es subconjunto del conjunto Q, y el conjunto Q es un subconjunto.

Podemos decir que: x pertenece a P entonces x pertenece a Q.

Es decir que la implicación p  q será siempre cierta, siempre que x no pertenece a P implique que x pertenece a Q.

Pero si x no pertenece a P ¿será cierto que siempre x pertenece a Q? Observa este diagrama:

Imagen 15: Elemento del subconjunto P.



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn al interior el conjunto Q. En el conjunto Q, se encuentra el conjunto P, al interior de Q, pero exterior a P está la letra x. x es un elemento del conjunto Q, pero no es elemento del subconjunto P del conjunto Q, y el conjunto Q es un subconjunto.

Aquí x pertenece a Q, pero x no pertenece a P. Es decir que alguna persona puede ser colombiana pero no es necesario que sea antioqueña, pues puede ser tolimense, costeña, cundinamarqués, etc.

Así que observa que una implicación, si p  q es verdadera, puede suceder que haya casos en los que q  p no lo sea:

Por ejemplo:

* Si Belisario Betancourt es antioqueño, entonces es colombiano
* Si López es colombiano, entonces es antioqueño

### Práctica lo aprendido

1. Si tenemos las proposiciones:

* a:"8>3"
* d:"6 divide a 12"
* g: "5x8 =40"
* e: "6 divide a 9"
* h: "3+2=3"
* c: "3>8"
* .f: '"6 divide a 6"
* i: "3-5= -2"
* b: “8>6”

1. Califica las proposiciones anteriores
2. Califica las proposiciones condicionales escribiendo (0) o (1)

* ab
* gh
* ac
* de
* ae
* di

1. Lee cada par de implicaciones, anota cuál de las dos es verdadera en todos los casos y explica por qué.
2. m  n: "Si es pato, entonces sabe nadar"

m  n, Es verdadera en todos los casos porque todo pato sabe nadar.

1. n  m: "Si sabe nadar, entonces es pato”

n  m, No es verdadera, ya no todos los que saben nadar son patos. Ejemplo: personas.

1. f  v: "Si tiene flores, entonces es vegetal"
2. v  f: "Si es vegetal, entonces tiene flores"
3. a  v: "Si es ave, vuela"
4. v  a: "Si vuela, es ave"
5. p  f: "Si tiene muchos pétalos, es flor"
6. f  p: "Si es flor, tiene muchos pétalos"
7. b  a: "Si nació en Buenos Aires, es argentino"
8. a  b: "Si es argentino, nació en Buenos Aires"
9. Complementa la tabla de verdad de la implicación:

Tabla 24: Valor de verdad de la implicación

| p | q | p  q |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 |  |
| 1 | 0 |  |
| 0 | 1 |  |
| 0 | 0 |  |

1. Analiza el siguiente cuadro:

Tabla 25: Porcentaje de analfabetismo 1980

| País | Número de habitantes | Porcentaje |
| --- | --- | --- |
| Bolivia | 5613486 | 27% |
| Brasil | 121148582 | 22% |
| Colombia | 25867326 | 17% |
| Cuba | 9723605 | 8% |
| México | 66846833 | 17% |
| Unión Soviética | 262436227 | 0% |

1. Forma las proposiciones compuestas que se indican, a partir de las siguien­tes proposiciones simples y califícalas:

* p: "Bolivia tiene el menor número de habitantes"
* q: "Colombia tiene el menor índice de analfabetismo"
* r: "La Unión Soviética tiene el mayor número de habitantes"
* s: "La Unión Soviética tiene el menor índice de analfabetismo".

1. p  q: Si Bolivia tiene el menor número de habitantes, entonces tiene el menor índice de analfabetismo. (Falso)
2. r  s:
3. p  r:
4. q  s:
5. q  s:

## INCLUSIÓN DE CONJUNTOS

Veamos otro de los ejemplos anteriores:

H = Habitantes de la República de Colombia.

H = {x / x es habitante de Colombia}

* Si x es jugador del América es futbolista.
* Si x es futbolista, es jugador del América.

Si dentro de los habitantes de la República de Colombia aplicamos la proposición abierta: x es futbolista.

Determinamos el conjunto de futbolistas:

Imagen 16: Subconjunto de futbolistas.

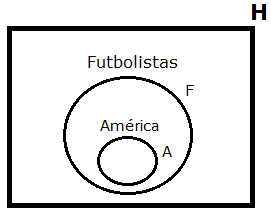
Representación gráfica de un subconjunto de futbolistas.


**Descripción imagen:** Diagrama de Venn etiquetado con la letra H, al interior el conjunto Futbolistas.

F = {x / x es futbolista}

Y si ahora tenemos la proposición, "x es jugador del América", tendre­mos un conjunto dentro del conjunto anterior:

Imagen 17: Subconjunto América en el de Futbolistas.



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn etiquetado con la letra H, al interior el conjunto F Futbolistas, al interior de este el conjunto A América.

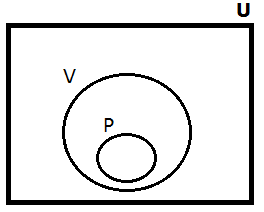
A = {x / x es jugador del América)

Observa que, en ocasiones, se da el caso de que, dado un conjunto, hay necesidad de seleccionar algunos elementos de él, bajo ciertas con­diciones para formar un nuevo conjunto.

En este caso se dice que el nuevo conjunto está incluido en el pri­mero, por ejemplo: A está incluido en F. También se dice que A es subconjunto de F; esto se simboliza: A  F y se lee: A está incluido en F, o A es subconjunto de F.

Por ejemplo, si de todos los seres vivos, tomamos el conjunto de vegetales, y dentro de él, a los que tienen flores tendríamos:

Imagen 18: Subconjunto P del subconjunto V en U



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn etiquetado con la letra U, al interior con el conjunto V, al interior de este el conjunto P.

* U = {x / x es ser vivo}
* V = {x / x es vegetal}
* P = {x / x tiene flores}

El diagrama ilustra la relación que existe entre P y F, se observa que P  V, es decir P está incluido en V, o P es subconjunto de V.

Por supuesto que cuando tomamos del universo algunos elementos para formar un conjunto, ya tenemos la primera relación de inclusión, por ejemplo: F  U.

Observa este otro ejemplo:

Dentro de los países del mundo tenemos:

* M ={ x / x es un país americano}
* N = { x / x participó en las olimpiadas de 1972}

Imagen 19: Elementos en conjuntos Intersecantes.

Representación gráfica de conjuntos con región en común y los elmentos en cada una de las regiones.


**Descripción imagen:** Diagrama de Venn etiquetado con la letra U, al interior los conjuntos M y N con una región en común, al interior del conjunto M (sin la intersección) se encuentra las letras P y G, en la intersección los conjuntos M y N, se encuentran las letras M, E, A, B. Al interior del conjunto N (sin la intersección) se encuentran las letras F, S, U. Externos a los conjuntos M y N se encuentras las letras Ch y D.

Dónde:

* P = Panamá
* G = Paraguay
* Ch= China Popular
* F = Francia
* M = México
* E = Estados Unidos
* A = Argentina
* S = Suecia
* B = Cuba
* U = URSS
* D = Bangladesh

Como adviertes en el diagrama, M  N, M no está incluido en N, o M no es subconjunto de N.

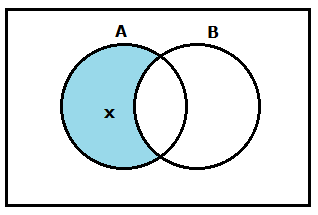
Así que, en conclusión, podemos decir que:

Para que un conjunto A, sea subconjunto de un conjunto B, es necesario que todos los elementos de A, pertenezcan a B.

A  B, si y sólo si, para todo x en A entonces x está en B.

En cambio, no podemos decir que A es subconjunto de B, si existe un elemento x que pertenezca a A y x no pertenezca a B.

Imagen 20: Conjuntos Intersecantes.



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn, al interior los conjuntos A y B con una región en común, al interior del conjunto A (sin la intersección) se encuentra la letra x. Dado que los conjuntos A y B comparten una región, estos se denominan Intersecantes.

O si todo elemento x que pertenece a A entonces x no pertenece a B.

Imagen 21: Conjuntos Disyuntos.

Representación gráfica de los conjuntos disyuntos A y B.


**Descripción imagen:** Diagrama de Venn, al interior los conjuntos A y B sin región en común, al interior del conjunto A se encuentra la letra x.

Para mostrar que un conjunto P, no es subconjunto de otro Q, basta con encontrar un elemento de P, que no pertenezca a Q, por ejem­plo:

* {Cordobeses} no contenido en {brasileños}
* {Happy Lora} pertenece a {cordobeses}
* {Happy Lora} no pertenece {brasileños}

Cuando hablamos de que un conjunto A, es subconjunto de otro B, por lo regular, pensamos que el subconjunto A tiene menos elementos que B.

Sean:

* A = {x / x es animal}
* B = {x / x es mamífero}

Por tanto, A está contenido en B

Sin embargo, si analizamos la definición de inclusión: A contenido en B si y sólo si para toda x que pertenece a A, x pertenece a B, veremos que A está contenido en A, porque sabemos, que todo x en A entonces x pertenece a A.

También podemos afirmar que el conjunto que no tiene ningún elemento denominado conjunto vacío, que se simboliza con: , se encuentre contenido en A, lo que se escribe:



Puesto que, en el conjunto vacío, no encontramos elementos (porque no los tiene) que no pertenezcan a A.

Así que decimos, que en cualquier conjunto A

* A está contenido en A
* Vacío contenido en A

A y  se llaman subconjuntos impropios de A. Así que puedes ver, que no siempre un subconjunto A de otro conjunto P, tiene menos elementos que P.

¿Cuántos subconjuntos podemos formar dentro de un conjunto?

Si tenemos los siguientes alimentos para desayunar:

* Fríjoles
* Longaniza
* Huevos

D = {f, l, h}

¿De qué alimentos puede estar compuesto nuestro desayuno?

1. En primer lugar, podemos no desayunar

O sea, vacío.

1. Desayunar huevos, longaniza y fríjoles:

{h, l, f}

1. O solamente desayunar:

* huevos:

{h}

* Longaniza:

{l}

* Fríjoles:

{f}

1. O huevos con longaniza:

{h, l}

1. Huevos con fríjoles:

{h, f}

1. Longaniza con fríjoles:

{l, f}

Observa que de un conjunto de 3 elementos podemos tener 8 subconjuntos:

Subconjuntos de A = {a, b, c}:

1. Vacío
2. A
3. {a}
4. {b}
5. {c}
6. {a, b}
7. {a, c}
8. {b, c}

En general, con 3 elementos se pueden formar: (dos a la 3) subconjuntos. 

¿Cuántos subconjuntos formarás con un conjunto de 4 elementos? Por ejemplo, si ahora para el desayuno puedes tener: huevos, longa­niza, fríjoles, tortillas.

Tendríamos los 8 subconjuntos como antes:

1. Vacío
2. {h, l, f}
3. {h}
4. {l}
5. {f}
6. {h, l}
7. {h, f}
8. {l, f}

y además otros ocho subconjuntos más, al agregar t, a cada uno de los anteriores:

1. {t}
2. {h, l, f, t}
3. {h, t}
4. {l, t}
5. {f, t}
6. {h. l. t}
7. {f, h, t}
8. {l, f, t}

En total, tenemos 16 subconjuntos con un conjunto de 4 elementos. 

¿Cuántos subconjuntos formaremos con un conjunto de 5 elementos? 

¿Y con un conjunto de 6 elementos?

Así que podemos decir que el número de subconjuntos de un conjunto, será 2 a la n en donde n representa el número de elementos del conjunto.

### Práctica lo aprendido

Lee detenidamente las tablas y después resuelve del 1 al 3:

| Criptógamas | Fanerógamas |
| --- | --- |
| * Algas * Hongos * Líquenes * Hepáticos * musgos | * angiospermas * gimnospermas  1. monocotiledóneas 2. dicotiledóneas |

Tabla 26: Clasificación de los vegetales.

Tabla 27: Clasificación de los animales.

| Invertebrados | Vertebrados |
| --- | --- |
| * espongiarios * celenterados * platelmintos * nematelmintos * anélidos * artrópodos * moluscos * equinodermos | * peces * anfibios * reptiles * aves * mamíferos |

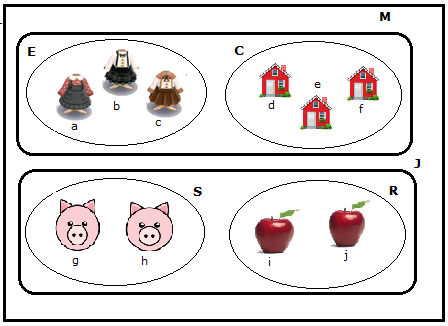
1. Escribe los conjuntos por extensión:

U = {x / x es un ser vivo}

* A = {x / x es fanerógama}
* H = {x / x es molusco}
* I = {x / x es ave}
* J = {x / x es reptil}
* K = {x / x es vertebrado}
* L = {x / x es invertebrado}
* M = {x / x es animal}
* B = {x / x es criptógama}
* C = {x / x es angiosperma}
* D = {x / x es dicotiledónea}
* E = {x /x es hongo}
* F= {x / x es vegetal}
* G = {x / x es artrópodo}

1. Representa con un diagrama los conjuntos:
2. A, F
3. A, B
4. B, F
5. B, E
6. G, L
7. I, J
8. Establece la relación de inclusión entre los conjuntos siguientes, escribien­do los símbolos de contenencia o no contenencia, según corresponda:
9. A y B
10. D y C
11. E y B
12. A y D
13. A y F
14. B y F
15. C y D
16. C y F
17. C y L
18. J y M
19. K y J
20. L y K
21. M y L
22. Si tenemos que Julio, Pedro, Manuel y Octavio, tienen la opción de asistir a un concurso de oratoria. ¿Cómo crees que se puedan reunir para ir?
23. No van al concurso:
24. Van los cuatro:
25. Van tres de ellos:
26. Van dos de ellos:
27. Va una de ellos:
28. Encuentra todos los subconjuntos de A = {1, 2, 3}
29. Escribe contenido o no contenido dentro del paréntesis, según corresponda, de acuerdo con las figuras

**Imagen 22: Subconjuntos de subconjuntos**



**Descripción imagen:** Diagrama de Venn, al interior con los conjuntos M y J. Al interior del conjunto M se encuentran los conjuntos disyuntos E y C, al interior de E hay 3 imágenes de vestidos etiquetados con las letras a, b, c. Al interior de C hay 3 dibujos de casas etiquetados con las letras d, e, f. Al interior del conjunto J están los conjuntos disyuntos S y R, al interior de S hay dos dibujos de cerdos etiquetados con las letras g, h. Al interior de R hay dos imágenes de manzanas etiquetadas con las letras i, j.

* 1. E y M
  2. M y C
  3. S y J
  4. S y R
  5. E y C
  6. C y M
  7. R y J
  8. J y R

1. Indica las posibles combinaciones que puede hacer una persona que siga la rece­ta que indica que se puede agregar al gusto, pimienta, orégano o clavo.

A = {p, o, c}

1. No agregar ingredientes
2. Agregar todos los ingredientes

¿Cuántas combinaciones fueron posibles en total?

## PROPOSICIONES EQUIVALENTES Y CONJUNTOS IGUALES

En la lección anterior, vimos que en una implicación no siempre se pue­de permutar el lugar del antecedente y el consecuente. Por ejemplo:

* p(x): "x es tolimense"
* q(x): "x es colombiano”

La proposición p(x) entonces q(x) es verdadera para cualquier x:

x: Murillo Toro

p  q: "Si Murillo Toro es tolimense, entonces es colombiano" es verdadero. Pero la proposición q(x) entonces p(x) no es verdadera para cualquier x:

x: Gabriel García Márquez

q  p: "Si García Márquez es colombiano, entonces es tolimense", es una proposición falsa ya que García Márquez si es colombiano pero es falso que sea tolimense.

Sin embargo, hay casos en los que sí ocurre que: p(x)  q(x) y q(x) p(x) son verdaderas para todos los casos:

Por ejemplo:

* p(x)  q(x): "Si un número natural es par, entonces su cuadrado es par."
* q(x)  p(x): "Si el cuadrado de un número natural es par, el número es par."
* p(x) = x es número par
* q(x) = x al cuadrado es número par

Si x = 4

* p(x) q(x): "Si x es par, x al cuadrado es par."

p  q: “Si 4 es par, 4 a la 2 es par"

* q(x)  p(x): "Si x al cuadrado es par, x es par."

q  p: "Si 4 a la 2 es par, 4 es par"

Cuando tenemos estos casos: p  q y q  p, en que las dos implicaciones son verdaderas en todos los casos decimos que las proposiciones son equivalentes, o que están relacionadas por una doble implicación y las representamos:

p  q

Lo que se traduce:

* p  q: "p es equivalente a q"
* p  q: "p si y sólo si q".

Por ejemplo:

"x es par si y sólo si x al cuadrado es par."

* A está contenido en B si y sólo si para todo x en A entonces x pertenece a B.

Se dice que dos proposiciones son equivalentes, si tienen el mismo valor de verdad.

Por ejemplo:

Si tenemos: m  n

m: “”

n: “ad = bc”

Decimos que:  si y sólo si ad = bc

Comprobamos:  si y solo si 3 por 8 = 6 por 4

* m: Verdadera
* n: Verdadera

Por tanto, m  n es verdadera.

Así, para que una equivalencia entre proposiciones sea verdadera, deben ser verdaderas las dos proposiciones que la formen o deben ser falsas las dos.

1. Sean

* p(x) = x es número par
* q(x) = x al cuadrado es número par

p(x)  q(x): "Si x es par, x al cuadrado es par."

q(x)  p(x): "Si x al cuadrado es par, x es par."

1. Escribe dos ejemplos que prueben la veracidad de las dos proposiciones anteriores:

Si dentro del universo de los números naturales, tenemos las proposiciones abiertas:

* p(x) = x es número par
* q(x) = x al cuadrado es número par

1. Sean

* p(x) = x es número par
* q(x) = x al cuadrado es número par

p(x)  q(x): "Si x es par, x al cuadrado es par."

q(x)  p(x): "Si x al cuadrado es par, x es par."

1. Escribe dos ejemplos que prueben la veracidad de las dos propo­siciones anteriores:

Si dentro del universo de los números naturales, tenemos las propo­siciones abiertas:

"x es par"

"x es múltiplo de 2"

Tenemos que p  q, porque todo número par, es múltiplo de 2, y todo múltiplo de dos, es par.

Si formamos los conjuntos determinados por las dos proposiciones:

1. P = {x / x es par}

P = {0, 2, 4, 6, ...}

1. Q = {x / x es múltiplo de 2}

Q = {0, 2, 4, 6, ...}

Observa que P = Q, pues los dos están formados por los mismos ele­mentos.

Podemos afirmar entonces que:

Dos proposiciones abiertas equivalentes generan conjuntos iguales, dentro del mismo universo.

¿Podemos decir que: P contenido en Q y que Q contenido en P? ¿Es decir todo x que pertenece a P, también x pertenece a Q? ¿Y todo x en Q, también x pertenece a P?

Por lo tanto, si tenemos A contenido en B y B contenido en A, podemos decir que A = B.



### Práctica lo aprendido

1. Si tienes las proposiciones:

* "x es número natural que termina en cero"
* "x es múltiplo de 10".

1. Determina los conjuntos, dentro del universo de los números naturales

A = {x/x es número natural que termina en cero}

B= {x/x es múltiplo de 10}

1. ¿Será cierto que A = B?
2. ¿Será siempre verdadera la proposición "x es múltiplo de 10 si y solo si x termina en cero?
3. Completa lo siguiente:

Si tenemos los conjuntos:

U = {x / x es dígito}

M = {x/ x es par}

N = {x / x es primo}

Encuentre:

* 1. M intersección N
  2. M complemento
  3. N complemento
  4. M intersección N complemento
  5. M complemento unión N complemento

¿Será cierto que: (M  N)' = M' U N'?

1. A partir de las siguientes proposi­ciones abiertas en el universo de las letras del abecedario español y realiza en ellos lo que se te pide:

* a (x): "x es vocal de la palabra educación"
* b (x): "x es vocal de la palabra Eloísa"
* c (x): "x es vocal del abecedario".
  1. Determina los conjuntos que se forman
* A = { x / x es vocal de la palabra Educación}
* B = { x / x es vocal de la palabra Eloísa}
* C = { x / x es vocal del abecedario}
  1. Elabora un diagrama que represente a los conjuntos anteriores.
  2. Escribe el signo contenencia o no contenencia entre los conjuntos:

1. A y B
2. B y C
3. A y C
4. B y A
5. C y B
6. C y A
7. A y A
8. B y B
9. C y C
   1. Escribe el signo equivalencia o no equivalencia entre las proposiciones:

* x pertenece a A y x pertenece a B
* x pertenece a B y x pertenece a C
* x pertenece a A y x pertenece a C
  1. Escribe el signo igual o diferente entre los conjuntos

1. A y B
2. B y C
3. A y C
4. A y A