

## Radicales

### Raíz $n$ -ésima de un número real

Si  $n \in \mathbb{Z}^+$ , entonces la raíz  $n$ -ésima de un número real  $a$  se define como:  $\sqrt[n]{a} = b$  significa que  $b^n = a$ .  
Si  $n$  es par, se debe tener  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ .

### Ejemplo

| Índice | Radical               | Número de raíces Reales                 | Ejemplos                                                                                                                             |
|--------|-----------------------|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Impar  | Cualquier número Real | Una de igual significado que el radical | $\sqrt[7]{128} = 2$ , porque $2^7 = 128$<br>$\sqrt[5]{-3125} = -5$ , porque $(-5)^5 = -3125$<br>$\sqrt[3]{0} = 0$ , porque $0^3 = 0$ |
| Par    | Positivo              | Dos raíces                              | $\sqrt[4]{2041} = \pm 7$ , porque $7^4 = 2041$<br>$0$ $(-7)^4 = 2041$                                                                |
|        | Nulo                  | Una raíz nula                           | $\sqrt[3]{0} = 0$ , porque $0^3 = 0$                                                                                                 |
|        | Negativo              | No existen raíces reales                | $\sqrt[4]{-8} \notin \mathbb{R}$ , porque no existe un número real que elevado a la 4 de $-8$ .                                      |

### Potencias con exponente fraccionario

Toda potencia con exponentes fraccionario puede escribirse como un radical. Si  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$  y  $a \in \mathbb{R}$ , se cumple que:

$$(a)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

### Ejemplo

Identifica los valores de las incógnitas  $x$ ,  $w$  y  $k$ , en las siguientes expresiones

$$81^{\frac{1}{4}} = x, (-343)^{\frac{1}{3}} = -7 \text{ y } K^{\frac{1}{5}} = -5$$

Se presentan estas potencias como expresiones radicales, así:

$$81^{\frac{1}{4}} = x \Rightarrow \sqrt[4]{81} = x$$

$$(-343)^{\frac{1}{3}} = -7 \Rightarrow \sqrt[3]{-343} = -7$$

$$K^{\frac{1}{5}} = -5 \Rightarrow \sqrt[5]{K} = -5$$

De esta manera, se identifica el valor de la incógnita. Luego:

$$\sqrt[4]{81} = x \Rightarrow x = 3$$

$$\sqrt[3]{-343} = -7 \Rightarrow W = 3$$

$$\sqrt[5]{K} = -5 \Rightarrow K = -3125$$

### Radicales equivalentes

Dos o mas radicales son equivalentes si sus potencias correspondiente tienen la misma base y el mismo exponente

#### Ejemplo

Los radicales  $\sqrt[3]{35^4}$  y  $\sqrt[12]{35^{16}}$  son equivalentes porque al escribirlos en forma de potencia sus bases y exponentes son iguales

$$\sqrt[3]{35^4} = 35^{\frac{4}{3}}$$

$$\sqrt[12]{35^{16}} = 35^{\frac{16}{12}} = 35^{\frac{4}{3}}$$

### Radicales de radicales a índice común

Reducir a índice común dos o mas radicales es encontrar radicales equivalentes a los dados que tengan el mismo índice

#### Ejemplo

Para reducir a índice común los radicales  $\sqrt[3]{2m}, \sqrt[2]{a \cdot (3x)^2}, \sqrt[4]{2 \cdot 3^4}$  se hacen a cabo los siguientes pasos:

Se halla el mínimo común múltiplo entre los índices:  $m.c.m.(2, 3, 4) = 12$   
Este será el índice común para todos los radicales

• Se divide el m.c.m. hallado por cada uno de los índices de los radicales, es decir, entre 2, 3 y 4.

• Cada resultado (6, 4 y 3) se multiplica por los exponentes correspondientes en los radicandos, así:

$$\sqrt[2]{(2m)^6} \quad \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^8 \cdot 6^8} \quad \sqrt[3]{2^9 \cdot 3^9 \cdot 6^9}$$

De esta forma, los radicales obtenidos son equivalentes a los dados y son reducidos a índice común.

### Racionalización

La racionalización es un proceso en el que se elimina la parte radical en el denominador de una expresión.

#### Ejemplo

Para racionalizar la expresión  $\frac{3h}{\sqrt[3]{9h}}$  cuyo índice del radical es 3, se amplifica

la fracción por un factor que elimine el radical en el denominador. Es decir, se busca un factor racionalizante que multiplicado por  $\sqrt[3]{9h}$  de como resultado  $3h$ . En este caso el factor es  $\sqrt[3]{3h^2}$  porque  $\sqrt[3]{9h} \cdot \sqrt[3]{3h^2} = 3h$ . Al racionalizar la expresión se obtiene:

$$\frac{3h}{\sqrt[3]{9h}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3h^2}}{\sqrt[3]{3h^2}} = \frac{\sqrt[3]{3h^3}}{\sqrt[3]{3h^3}} = \frac{3h \cdot \sqrt[3]{3h^2}}{3h} = \sqrt[3]{3h^2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2}}$$

d. El conjugado de un binomio es otro binomio con signos negativos.

27

## Ejercicios página 27

1) Simplifica cada expresión

a)  $\sqrt[5]{-32} +$

b)  $-4\frac{1}{2} - \sqrt[5]{-243} R = \frac{1}{11}$

$$\frac{-\sqrt[5]{4} - \sqrt[5]{-243}}{\sqrt{121}}$$

$$\frac{-2 - (-3)}{\sqrt{121}}$$

$$\frac{-2 + 3}{\sqrt{121}} = \frac{1}{11}$$

c)  $\frac{\sqrt{100} - \sqrt[4]{16}}{\sqrt[3]{0}} R = \frac{9}{6}$

$$\frac{10 - \sqrt[4]{16}}{\sqrt[3]{0}}$$

$$\frac{10 - 2}{\sqrt[3]{0}}$$

$$\frac{8}{\sqrt[3]{0}}$$

$$R = \frac{8}{0}$$

d)  $-64\frac{1}{3} \cdot \sqrt{100} R = -40$

$$-64\frac{1}{3} \times 10$$

$$-10 \times 64\frac{1}{3}$$

$$-10 \times (2^6)^{\frac{1}{3}}$$

$$-10 \times 2^2$$

$$-10 \times 4$$

$$R = -40$$

3) Reducir a índice común los siguientes radicales

a)  $\sqrt[4]{15a^3x^2}$ ,  $\sqrt{2a}$ ,  $\sqrt[3]{3a^2b}$

$\text{mcm}(4, 2, 3) = 12$

$\sqrt[12]{15^3a^9x^6}$ ,  $\sqrt[12]{4a^4}$ ,  $\sqrt[12]{9a^8b^4}$

b)  $\sqrt[4]{5}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[4]{7}$

$\text{mcm}(4, 2, 3, 4) = 12$

$\sqrt[12]{125}$ ,  $\sqrt[12]{64}$ ,  $\sqrt[12]{81}$ ,  $\sqrt[12]{49}$

c)  $\sqrt[4]{7a^3b}$ ,  $\sqrt{5x}$ ,  $\sqrt[3]{4x^2y}$

$\text{mcm}(4, 2, 3) = 12$

$\sqrt[12]{7^3a^9b^3}$ ,  $\sqrt[12]{125x^6}$ ,  $\sqrt[12]{16x^4y^2}$

d)  $\sqrt[4]{3a^3x^3}$ ,  $\sqrt{2ab}$

$\text{mcm}(4, 2) = 4$

$\sqrt[4]{512a^6x^3}$ ,  $\sqrt[4]{9a^{10}b^2}$

e)  $\sqrt[5]{3a^2x}$ ,  $\sqrt{2ab}$ ,  $\sqrt[15]{5a^3x^2}$

$\text{mcm}(5, 2, 15) = 30$

$\sqrt[30]{27a^6x^3}$ ,  $\sqrt[30]{32a^{15}b^5}$ ,  $\sqrt[30]{5a^3x^2}$

5) Racionaliza cada expresión

$$A) \frac{4ab}{\sqrt[3]{x^2 y^3 z^3 b}} = \frac{4a\sqrt[3]{x^6}}{yzx}$$

$$= \frac{4ab}{yz\sqrt[3]{x^6}}$$

$$* \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{x^6}}$$

$$= \frac{4ab\sqrt[3]{x^6}}{yzxb}$$

$$= \frac{4a\sqrt[3]{x^6}}{yzx}$$

$$C) \frac{m^3 n \sqrt{x}}{\sqrt[5]{2^4 m^7 n^6 x}} \cdot \frac{2m^* \sqrt{x}^{*5} \sqrt[4]{2m^3 n^4 x^4}}{2nx}$$

$$= \frac{m^3 n \sqrt{x}}{mn \sqrt[5]{2^4 m^7 n^6 x}}$$

$$= \frac{m^2 \sqrt{x}}{\sqrt[5]{2^4 m^2 n x}}$$

$$* \frac{5\sqrt[4]{2m^3 n^4 x^4}}{5\sqrt[4]{2m^3 n^4 x^4}}$$

$$\frac{m^2 \sqrt{x}^{*5} \sqrt[4]{2m^3 n^4 x^4}}{2mnx} =$$

$$\frac{m^* \sqrt{x}^{*5} \sqrt[4]{2m^3 n^4 x^4}}{2nx}$$

$$B) \frac{h}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}} = \sqrt{x+h} + \sqrt{x}$$

$$\frac{h}{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}$$

$$* \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= h * (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})$$

$$= \sqrt{x+h} + \sqrt{x}$$

$$D) \frac{\sqrt{m+1}}{1 - \sqrt{m+1}} = \frac{\sqrt{m+1} + m+1}{m}$$

$$\frac{\sqrt{m+1}}{(1 - \sqrt{m+1})}$$

$$* \frac{(1 + \sqrt{m+1})}{(1 + \sqrt{m+1})}$$

$$= \frac{(\sqrt{m+1} + m+1)}{(1 - (m+1))}$$

$$= \frac{(\sqrt{m+1} + m+1)}{-m}$$

$$= \frac{(\sqrt{m+1} + m+1)}{m}$$

$$E) \frac{3ab^2}{\sqrt{ab^5}} = \frac{3\sqrt{ab}}{b}$$

$$= \frac{3ab^2}{b^2\sqrt{ab}}$$

$$= \frac{3a}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$$

$$= \frac{3a\sqrt{ab}}{ab}$$

$$= \frac{3\sqrt{ab}}{b}$$

$$F) \frac{x}{\sqrt{x^2+1-x}} = \frac{x(\sqrt{x^2+1+x})}{(\sqrt{x^2+1-x})(\sqrt{x^2+1+x})}$$

$$= \frac{x(\sqrt{x^2+1+x})}{(\sqrt{x^2+1-x})(\sqrt{x^2+1+x})}$$

$$= \frac{x(\sqrt{x^2+1+x})}{x^2+1-x^2-1}$$

$$G) \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)}$$

$$H) \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2 \cdot (\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2})(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2 \cdot (\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2})}{2-2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

6) Cerca de la superficie terrestre, el tiempo  $t$  tarda un objeto en caer una distancia  $d$ , está dado por la expresión  $t = \frac{1}{4} d^2$ , donde  $t$  se mide en segundos y  $d$  se mide en pies. Halla el tiempo que tardara un objeto en caer 100 pies.

$R = 2.5$  Segundos

7) La relación entre el radio  $r$  de una esfera y su área total  $A$  es  $R = \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ . ¿Cuál es el radio de una esfera que tiene un área total  $4\pi$  de  $64\pi$  unidades cuadradas.

$$R = R^2 \sqrt{\frac{36\pi}{4\pi}} = \sqrt{9} = 3 \text{ unidades}$$

### Evaluación de Aprendizaje

1) Completa la tabla

| $n$ | $\frac{1}{2^n}$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ |
|-----|-----------------|------------------------------------------|
| 1   | 2               | 0.5                                      |
| 2   | 1.4142          | 0.25                                     |
| 5   | 0.4             | 0.1                                      |
| 10  | 0.2             | 0.05                                     |
| 100 | 0.02            | 0.005                                    |

2) ¿Que sucede con la raíz  $n$ -ésima de 2 cuando  $n$  se incrementa?

$R =$  A medida que aumenta el índice de la raíz ( $n$ ) el valor o el resultado de esta disminuye

B) ¿Que sucede con la raíz  $n$ -ésima de  $\frac{1}{2}$  cuando  $n$  se incrementa

R: A medida que aumenta el índice de la raíz ( $n$ ) el valor o resultado de esta disminuye

2) Escribe T si la proposición es falsa o V si es verdadera

a) Racionalizar significa eliminar todos los radicales de una expresión

R: F

B) Solo las expresiones con radicales de índice 2 se pueden racionalizar

R: V

c) El factor racionalizante es una expresión que permite eliminar un radical

R: V

D) El conjugado de un binomio es otro binomio con signos negativos

R: V

