RAZONES Y PROPORCIONES

EXPLICACIÓN

MAGNITUD: Es toda cualidad de los objetos que puede ser medida.

RAZÓN:

Fuente: Supermat 7. Editorial Voluntad Matemáticas 7 Editorial Santillana. Desafío 7 Editorial Norma.

Muchas veces en la vida diaria y en las ciencias se necesita comparar medidas y cantidades. Cuando se desee comparar dos magnitudes tales como el largo y el ancho de una lámina, la longitud de dos segmentos, el área de dos figuras geométricas, la cantidad de hombres y mujeres de una región, la capacidad de dos recipientes o la votación obtenida por dos candidatos, se establece la razón entre dos magnitudes.

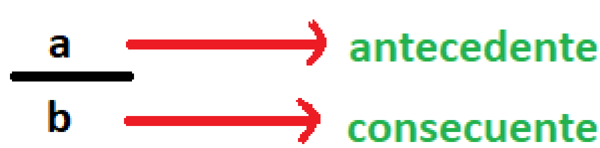
Ejemplo: Comparar el número de estampillas que tienen dos personas, sabiendo que la primera tiene 800 y la segunda 400.

Las cantidades se pueden comparar por su diferencia o por el cociente entre ambas. Se puede decir entonces que la primera persona tiene 400 estampillas más que la segunda. También puede afirmarse que la primera persona tiene el doble de estampillas que la segunda.

Definición: La comparación de un número con otro mediante el cociente indicado de dichos números, se llama razón. Se llama razón a la comparación por cociente de dos cantidades a y b. La razón entre dos magnitudes es un número, sin unidades. Tal razón se puede expresar como:

a:b   ó $\frac{a}{b}$ con b‡0   se lee: **a** es a **b**

Los términos de una razón se llaman **antecedente** y **consecuente.**



Toda razón tiene un cociente, denominado **valor de la razón**. El valor de la razón es solo un número, por lo tanto es independiente de toda unidad en que estén expresados los términos de la razón.

Ejemplo: La expresión “En Colombia hay 52 hombres por cada 100 mujeres”. Por lo tanto, la razón entre el número de hombres respecto al de mujeres es de 52 a 100: $\frac{52}{100}$

Ejemplo: Por cada 10 cucharadas de harina se emplean 2 huevos: $\frac{10}{2}$

PROPORCIÓN:

La igualdad de dos razones se llama proporción.

En símbolos $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ es una proporción y se lee: **a** es a **b** como **c** es a **d**

a y **d** se llaman extremos de la proporción

b y **c** se llaman medios de la proporción

Cuando los medios o los extremos de una proporción son iguales, cualquiera de ellos se llama **media proporcional de los otros dos**.

En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos. Dicho de otra forma: Dos razones forman una proporción si y solo si el producto de sus extremos es igual al producto de sus medios.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad a(d) = b(c)$$

Ejemplo: Determinar si las razones $\frac{13}{5}$ y $\frac{26}{10}$ forman una proporción.

$13(10) = 5(26)$

$130 = 130$

Ejemplo:

Encontrar **x** si $\frac{x}{8}=\frac{3}{4}$

$$x=\frac{8(3)}{4}=\frac{24}{4}=6$$

Ejemplo: Un mecanógrafo escribe 150 palabras en 2 minutos, cuántas palabras puede escribir en 5 minutos?

$$\frac{150}{2}=\frac{x}{5}$$

$$x=\frac{150(5)}{2}=\frac{750}{2}=375$$

TASA:

La tasa es una razón donde aparecen dos unidades de medida diferentes. En general, la tasa se da en términos de una cantidad por unidad.

Ejemplo:

Kilómetros por hora que se representa por $\frac{km}{h}$

PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA

Correlación: Dos magnitudes están correlacionadas cuando una depende de la otra. Ejemplos:

El área de un cuadrado depende de la longitud de los lados.

La cantidad de pintura necesaria para pintar una casa depende del área de las paredes.

En cualquier relación es posible identificar cuáles magnitudes son dependientes y cuáles independientes.

Una magnitud es **independiente** cuando quien estudia el fenómeno le asigna arbitrariamente el valor de medida, y es **dependiente** cuando su valor de medida depende del valor de la magnitud independiente. Ejemplo: El tiempo que tarde en realizarse una obra depende del número de obreros que participen en su ejecución. La magnitud independiente es el número de obreros, en tanto que el tiempo es la magnitud dependiente.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA:

Si la razón entre dos magnitudes correlacionadas permanece constante, se dice que las magnitudes son directamente proporcionales. La razón constante se denomina constante de proporcionalidad.

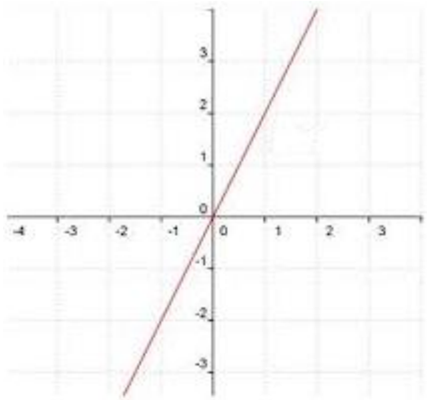
Dos magnitudes están directamente correlacionadas, si al aumentar una, la otra también aumenta.

Magnitud A	Magnitud B
a	b
c	d

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = cons\tan te$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = cons\tan te$$

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al representarlas en un plano cartesiano se obtienen puntos a lo largo de una línea recta que pasa por el origen del sistema.



Ejemplo: Si el consumo de energía de un hogar aumenta de un mes a otro, el dinero que se paga por el servicio también aumenta.

Ejemplo: La fuerza de una persona y el peso que puede levantar.

Ejemplo: El precio de un artículo y el número de artículos.

Ejemplo: El tiempo empleado y la distancia recorrida.

Ejemplo: Un tiovivo da 24 vueltas en 5 minutos. Cuánto tiempo tardará en hacer 38 vueltas?

Vemos que si aumentan las vueltas aumentan los minutos, razón por la cual las magnitudes son directamente proporcionales:

$$\frac{24}{38} = \frac{5}{t}$$

$$t = \frac{38(5)}{24} = \frac{190}{24} = 7,9$$

Ejemplo: La rueda de un automóvil recorre 15 metros cada 10 vueltas. Cuántas vueltas dará para recorrer 75 metros?

Distancia (m)	# de vueltas
15	10
75	x

Si la distancia aumenta, el número de vueltas aumenta en la misma proporción, luego las magnitudes distancia y número de vueltas son directamente proporcionales. Por tanto:

La constante de proporcionalidad es: $k = \frac{15}{10} = 1,5$

Al ser directamente proporcionales se puede afirmar que $\frac{75}{x}=1,5$ Solucionemos ahora ésta ecuación: $\frac{75}{x}=1,5 \Rightarrow (1,5)x=75 \Rightarrow x=\frac{75}{1,5}=50$

Por lo tanto, para recorrer 75 metros las ruedas del automóvil darán 50 vueltas.

PROPORCIONALIDAD INVERSA:

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si el producto entre la magnitud dependiente y la independiente es constante.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al aumentar una disminuye la otra o viceversa.

Magnitud A	Magnitud B
a	b
c	d

$$\frac{a}{c}=\left(\frac{b}{d}\right)^{-1}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$$

Ejemplo: El volumen y la presión de un gas.

Ejemplo: La aceleración y el tiempo que tarda un móvil en realizar un recorrido.

Ejemplo: Tiempo de realización de una obra con respecto a la cantidad de obreros que participan en ella.

En una fábrica 12 obreros hacen cierto trabajo en 15 horas. Cuánto tiempo demoran 5 obreros en efectuar el mismo trabajo en las mismas condiciones?

# de obreros	Tiempo (h)
12	15
5	x

Al disminuir el número de obreros, el tiempo aumenta en la misma proporción, luego son magnitudes inversamente proporcionales. Por lo tanto:

$$\frac{12}{5}=\left(\frac{15}{x}\right)^{-1}$$

$$\frac{12}{5}=\frac{x}{15}$$

$$\frac{12}{5}=\frac{x}{15}\Rightarrow x=\frac{12(15)}{5}=36$$

Se concluye que 5 obreros realizan la obra en 36 horas.

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA E INVERSA:

Cuando en un problema solo intervienen dos magnitudes, se dice que es un problema de regla de tres simple.

Un problema en el que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales y se conocen dos valores de una de ellas y uno de la otra, se llama problema de regla de tres simple directa.

También puede suceder que las dos magnitudes que aparecen en el problema sean inversamente proporcionales; en este caso decimos que es un problema de regla de tres simple inversa.

Ejemplo de regla de tres simple directa: Un móvil recorre a velocidad constante 100 km en 2 horas. Cuántos kilómetros recorrerá en 10 horas?

Distancia(km)	Tiempo (h)
100	2
x	10

Como se trata de magnitudes directamente proporcionales, se escribe:

$$\frac{100}{2}=\frac{x}{10}$$

Por lo tanto: Aplicando que el producto de medios es igual al producto de extremos

$$\frac{100}{2}=\frac{x}{10}\Rightarrow 2x=100(10)\Rightarrow x=\frac{100(10)}{2}=500$$

Ejemplo de regla de tres simple inversa: Con el agua de un depósito se llenan 60 botellas de 5 litros cada uno, cuántas botellas de 0,75 litros se podrán llenar con el agua del mismo depósito?

# de botellas	Capacidad (l)
60	5
x	0,75

Por ser inversamente proporcionales resulta la proporción:

$$\frac{60}{x}=\frac{0,75}{5}$$

Como producto de medios es igual al producto de extremos:

$$\frac{60}{x}=\frac{0,75}{5}\Rightarrow 0,75x=60(5)\Rightarrow x=\frac{60(5)}{0,75}=400$$

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA:

Cuando en un problema de regla de tres intervienen más de dos magnitudes se dice que la regla de tres es compuesta.

Para resolver problemas de proporcionalidad compuesta se tiene en cuenta el tipo de relación que existe entre las magnitudes que hacen parte del problema.

Si todas las magnitudes que intervienen son directamente proporcionales entre sí, la regla de tres compuesta es directa.

Si por el contrario, todas las magnitudes que intervienen son inversamente proporcionales, entonces la regla de tres compuesta es inversa.

También se puede dar el caso de tener en un problema magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales, decimos entonces que la regla de tres compuesta es mixta.

Propiedad fundamental:

Magnitudes

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_2	b_2	c_2	d_2

Si B y C son directamente proporcionales a A, y D es inversamente proporcional a A, se tiene:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{c_1}{c_2}\cdot\frac{d_2}{d_1}$$

Regla práctica para solucionar problemas: Se compara la magnitud de la incógnita con cada una de las otras (considerando constantes las demás). Se coloca un signo + encima de las que resulten directas y un signo – encima de las inversas. Se aplica la propiedad fundamental de la proporcionalidad compuesta a la razón que tiene la incógnita y se despeja la misma.

Ejemplo: Si 8 pintores tardan 20 días en pintar 4.000 m² de pared. Cuántos días tardarán 10 pintores en pintar 6.000 m² de pared?

# de pintores	Tiempo (días)	Superficie (m^2)
8	20	4.000
10	x	6.000

Comparando la magnitud TIEMPO con las otras magnitudes: El tiempo es directamente proporcional a la superficie pintada e inversamente proporcional al número de pintores.

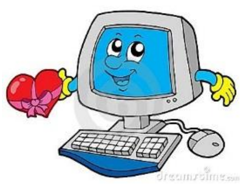
Aplicando la propiedad fundamental de la proporcionalidad compuesta, tenemos:

$$\frac{x}{20} = \frac{6.000}{4.000} \cdot \frac{8}{10}$$

$$\frac{x}{20} = \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{20(6)}{5} = 24$$

Tardan 24 días



Analice los siguientes problemas resueltos

https://es.slideshare.net/maruja1945/problemas-de-magnitudes-directa-e-inversamente-proporcionales

IN ENGLISH

Ratios and proportions

FUENTE: https://www.khanacademy.org/test-prep/praxis-math/praxis-math-lessons/praxis-math-number-and-quantity/a/gtp--praxis-math--article--ratios-and-proportions--lesson

What are ratios and proportions?

A **ratio** is a comparison of two quantities. The ratio of a to b can also be expressed as a:b *OR a* divided by, b

[Examples]

A **proportion** is an equality of two ratios. We write proportions to help us establish equivalent ratios and solve for unknown quantities.

[Example]

What skills are tested?

- Identifying and writing equivalent ratios
- Solving word problems involving ratios
- Solving word problems using proportions

How do we write ratios?

Two common types of ratios we'll see are **part to part** and **part to whole**. For example, when we make lemonade:

- The ratio of lemon juice to sugar is a part-to-part ratio. It compares the amount of two ingredients.
- The ratio of lemon juice to lemonade is a part-to-whole ratio. It compares the amount of one ingredient to the sum of all ingredients.

To write a ratio:

1. Determine whether the ratio is part to part or part to whole.
2. Calculate the parts and the whole if needed.
3. Plug values into the ratio.
4. Simplify the ratio if needed. Integer-to-integer ratios are preferred.
   [Example: Part to whole]

   [Examples: Simplifying ratios]

   Equivalent ratios are ratios that have the same value. Given a ratio, we can generate equivalent ratios by multiplying both parts of the ratio by the same value.

   [Example]

How do we use proportions?

If we know a ratio and want to apply it to a different quantity (for example, doubling a cookie recipe), we can use **proportional relationships**, or equations of equivalent ratios, to calculate any unknown quantities.

a:b = c:d

To use a proportional relationship to find an unknown quantity:

1. Write an equation using equivalent ratios.
2. Plug in known values and use a variable to represent the unknown quantity.
3. If the numeric part of one ratio is a multiple of the corresponding part of the other ratio, we can calculate the unknown quantity by multiplying the other part of the given ratio by the same number.
4. If the relationship between the two ratios is not obvious, solve for the unknown quantity by isolating the variable representing it.
   [Example]

VIDEO: **Introduction to proportional relationships**
https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/7th-constant-of-proportionality/v/introduction-proportional-relationships

VIDEO: I**dentifying constant of proportionality graphically**
https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/7th-constant-of-proportionality/v/identifying-constant-of-proportionality-graphically

VIDEO: **Constant of proportionality from graph**

https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/7th-constant-of-proportionality/v/constant-of-proportionality-from-graph

VIDEO: **Constant of proportionality from tables**
https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/7th-constant-of-proportionality/v/example-identifying-a-proportional-relatioship-given-a-constant-of-proportionality

VIDEO: Identifying the constant of proportionality from equation

https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/7th-constant-of-proportionality/v/identifying-the-constant-of-proportionality

VIDEO: Writing proportions (example)

https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/cc-7th-write-and-solve-proportions/v/writing-proportions

VIDEO: solving proportions (exercises)

https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/cc-7th-write-and-solve-proportions/v/find-an-unknown-in-a-proportion

VIDEO: Proportionality constant from table with equations

https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/7th-constant-of-proportionality/v/proportionality-constant-from-table

VIDEO : Example (problem)

https://www.khanacademy.org/test-prep/praxis-math/praxis-math-lessons/praxis-math-number-and-quantity/v/gtp--praxis-math--video--ratios-and-proportions

VIDEO: Example (problem)

https://www.khanacademy.org/test-prep/praxis-math/praxis-math-lessons/praxis-math-number-and-quantity/v/gtp--praxis-math--video--percentages

VIDEO: Problem (example)

https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/cc-7th-write-and-solve-proportions/v/find-an-unknown-in-a-proportion-2

VIDEO: Problem (example)

https://www.khanacademy.org/test-prep/praxis-math/praxis-math-lessons/praxis-math-number-and-quantity/v/gtp--praxis-math--video--rates

VIDEO:

https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/constant-of-proportionality/v/comparing-constants-of-proportionality

VIDEO:

https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/constant-of-proportionality/v/comparing-proportionality-constants

VIDEO:

https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/constant-of-proportionality/e/compare-constants-of-proportionality

VIDEO:

https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/cc-7th-proportional-rel/v/testing-whether-area-is-proportional-to-side-length

VIDEO:

https://www.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-ratio-proportion/cc-7th-proportional-rel/v/proportionality-between-side-length-and-perimeter