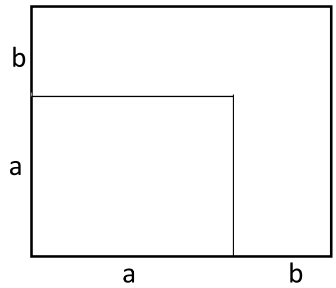
INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA LA SAGRADA FAMILIA

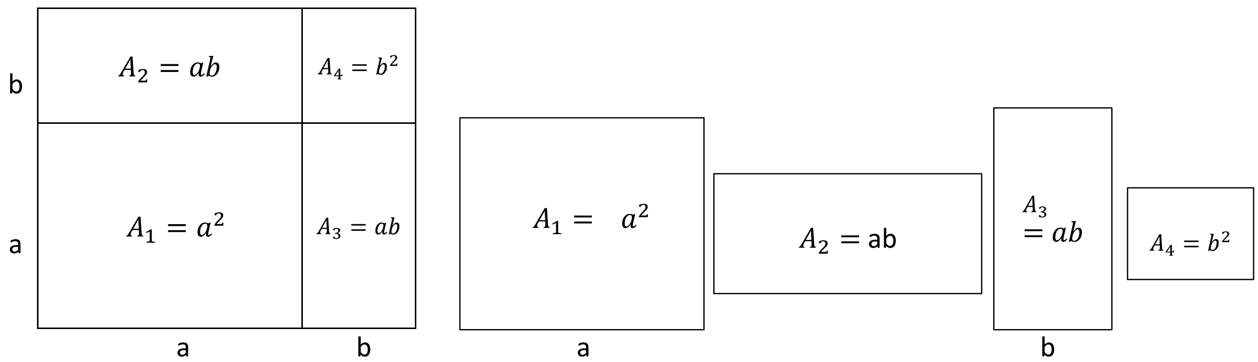
ÁREA DE MATEMÁTICAS **ALGEBRA GRADO 8** **PERÍODO 2**

TEMA: PRODUCTOS NOTABLES

Existe cierta clase de multiplicaciones entre binomios, las cuales se usan con frecuencia; éstas reciben el nombre de Productos Notables o Productos especiales.
A continuación, un ejemplo de cómo se demuestra uno de los productos notables más utilizados en matemáticas.



Hallar el área del cuadrado y encontrar dos expresiones equivalentes.
El área del cuadrado se calcula multiplicando lado por lado.
En la figura adjunta, el lado mide $a + b$
Luego el Área sería: $(a+b)(a+b) = (a+b)^2$ (primera expresión)
Si se analiza un poco más, se puede encontrar el área total de cuadrado
Adicionando las áreas parciales que se formaron.
El cuadrado de la siguiente figura hace evidente este hecho.
El Área total es la adición de las áreas parciales, es decir $A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$



$$A_1 \quad + \quad A_2 \quad + \quad A_3 \quad + \quad A_4$$
$$(a+b)^2 \quad = \quad a^2 \quad + \quad \text{ab} \quad + \quad \text{ab} \quad + \quad b^2$$

El área del cuadrado de lado $a + b$ es $(a+b)^2$ o a^2 + 2ab + b^2, es decir:

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \mathbf{2ab} + \boldsymbol{b}^2}$$

La expresión $(a+b)^2$ equivale a: a^2 + 2ab + b^2, es decir, si a es el primer término y b el segundo, la expresión $(a+b)^2$ equivale al cuadrado del primer término, a^2, más dos veces el primer término por el segundo, 2ab, más el cuadrado del segundo término, b^2, lo cual se conoce como el cuadrado de la suma de dos términos.

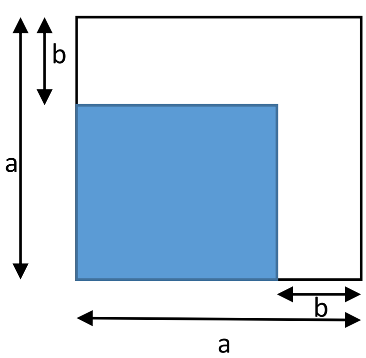
Ej. Aplicar la fórmula del producto notable $(a+b)^2$ para solucionar el siguiente ejercicio:
$(2x+3y)^2 \Longrightarrow a = 2x \quad b = 3y$
$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = \boxed{4x^2 + 12xy + 9y^2}$

Verifiquemos lo anterior con la ayuda de la propiedad distributiva y el método PEIU

$(2x+3y)^2 = (2x+3y)(2x+3y) = 4x^2 + 6xy + 6xy + 9y^2 = \boxed{4x^2 + 12xy + 9y^2}$ similar al resultado anterior

Ej. Resolver $\left(m + \sqrt{3}\right)^2 = m^2 + 2\sqrt{3}\,m + 3$
Verificación $\Longrightarrow$ $\left(m+\sqrt{3}\right)^2 = \left(m+\sqrt{3}\right)\left(m+\sqrt{3}\right) = m^2 + \sqrt{3}\,m + \sqrt{3}\,m + \left(\sqrt{3}\right)^2 = m^2 + 2\sqrt{3}\,m + 3$

En la siguiente gráfica, encontrar el área del cuadrado sombreado:



Si el lado del cuadrado mayor tiene de longitud **a**, la diferencia entre **a** y **b** es la longitud del del lado del cuadrado menor (el sombreado), entonces tal longitud es **a** – **b**.

Luego el área del cuadrado sombreado es $(a-b)(a-b)\ o\ (a-b)^2$
Así como el producto $(a+b)^2$ tiene una expresión equivalente (demostrado con la propiedad distributiva), el producto $(a-b)^2$ también lo tiene.

Conclusión: El área del cuadrado de lado $a - b\ es\ (a-b)^2\ o\ a^2 - 2ab + b^2$, es decir:

$$\boxed{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - \mathbf{2ab} + \boldsymbol{b}^2}$$

La expresión $(a-b)^2$ equivale a: a^2– 2ab + b^2, es decir, si a es el primer término y b el segundo, la expresión $(a-b)^2$ equivale al cuadrado del primer término, a^2, menos dos veces el primer término por el segundo, 2ab, más el cuadrado del segundo término, b^2, lo cual se conoce como el cuadrado de la diferencia de dos términos.

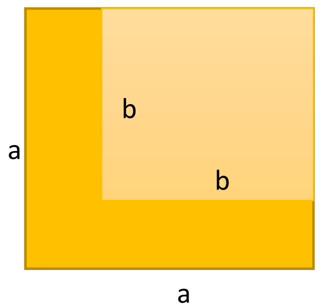
Ej. Resolver $(y^{10} - 10z^{20})^2 = (y^{10})^2 - 2(y^{10})(10z^{20}) + (10z^{20})^2 = y^{20} - 20y^{10}z^{20} + 100z^{40}$

Verificación: $(y^{10} - 10z^{20})^2 = (y^{10} - 10z^{20})(y^{10} - 10z^{20}) = y^{20} - 10y^{10}z^{20} - 10y^{10}z^{20} + 100z^{40} =$

$$y^{20} - 20y^{10}z^{20} + 100z^{40}$$

Ej. Resolver: $(2a - 3b)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3b) + (3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$.

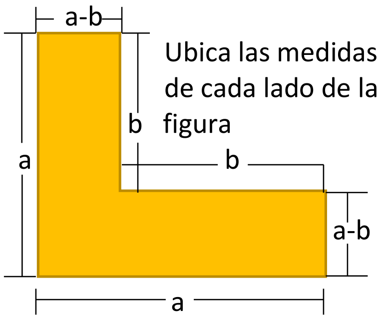
Ahora vamos a demostrar geométricamente que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$



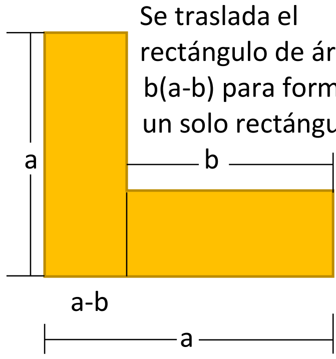
Al cuadrado de longitud de cada lado **a**, se le quita el cuadrado de longitud **b**

$$a^2 - b^2$$

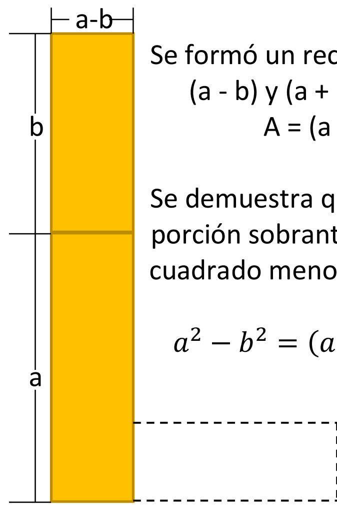
Esta expresión simboliza la porción de la figura que sobra al hacer la sustracción.
Es necesario hallar el área de la porción sobrante para ver su equivalencia con respecto a $a^2 - b^2$.



Ubica las medidas de cada lado de la figura



Se traslada el rectángulo de área b(a-b) para formar un solo rectángulo



Se formó un rectángulo de lados (a - b) y (a + b), cuya área es:
A = (a - b) y (a + b)

Se demuestra que el área de la porción sobrante al quitar el cuadrado menor del mayor es:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

La expresión : $(a + b)(a - b)$ *equivale a* $= a^2 - b^2$

El producto $(a + b)(a - b)$ *equivale a* $a^2 - b^2$, el cual se conoce como la suma por la diferencia de dos términos, si a es es el primer término y b el segundo, la expresión $(a + b)(a - b)$ equivale al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo.

Ejercicio 1.- Solucionar el producto $(4x - \sqrt{y})(4x + \sqrt{y})$:
Solución: $(4x - \sqrt{y})(4x + \sqrt{y}) = (4x)^2 - (\sqrt{y})^2 = 16x^2 - y$, verificar con la propiedad distributiva.

Ejercicio 2.- Solucionar el producto $(m^2 - 3n)(m^2 + 3n)$:
Solución: $(m^2 - 3n)(m^2 + 3n) = (m^2)^2 - (3n)^2 = m^4 - 9n^2$, verificar con la propiedad distributiva.

Ejercicio 3.- Solucionar el producto $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{b}\right)\left(\sqrt{x} + \frac{1}{b}\right)$:
Solución: $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{b}\right)\left(\sqrt{x} + \frac{1}{b}\right) = (\sqrt{x})^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2 = x - \frac{1}{b^2}$, verificar con la propiedad distributiva.

OTROS PRODUCTOS NOTABLES

CUBO DE UN BINOMIO: $\begin{cases}(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3\end{cases}$

Si en la expresión $(a \pm b)^3$, **a** es el primer término y **b** el segundo, entonces $(a \pm b)^3$ equivale al cubo del primer término más o menos tres veces el cuadrado del primer término por el segundo término, más tres veces el primer término por el cuadrado del segundo término, más o menos el cubo del segundo término.

PRODUCTO DE BINOMIOS DE LA FORMA: $(M + a)(M + b) = M^2 + (a + b)M + a.b$
El producto de la forma $(M + a)(M + b)$, es igual al cuadrado del primer término de los binomios más la suma de los segundos términos multiplicados por el primer término de los binomios más el producto de los segundos términos de los binomios.
Ej. 1. Resolver el producto notable $(2 + a)^3 = 2^3 + 3(2^2)a + 3(2)a^2 + a^3 = 8 + 12a + 6a^2 + a^3$
Ej. 2. Resolver el producto notable $(b - 5a)^3 = b^3 - 3(b^2)5a + 3(b)(5a)^2 - (5a)^3 = b^3 - 15ab^2 + 75a^2b - 125a^3$
Ej. 3. Resolver el producto notable $(x - 3)(x + 7) = x^2 + [(-3) + 7].x + (-3).7 = x^2 + 4x - 21$
Ejercicio:
Escribir en el cuadro el factor que hace válida cada igualdad:

a) $\boxed{}(x^2 - y^2) = x^4 - y^4$
b) $(x + y)\boxed{} = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
c) $\boxed{}(2m + 4) = 4m^2 + 10m + 4$
d) $(4x - y)(\quad) = 16x^2 - 8xy + y^2$
e) $(a - 2)(a^2 + 4)\boxed{} = a^4 - 16$
f) $(x^2 - 2xy + y^2)\boxed{} = (x - y)^3$
g) $(x^2 - 4)\boxed{} = x^4 - 7x^2 + 12$