Operaciones con funciones

APRENDIZAJE: Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.

Sigue en orden cada una de las siguientes instrucciones

- DEL LIBRO PAGINA 54, 55 y 56 : Lectura –análisis y Resumen sintético en el cuaderno
  - Dominio de las funciones suma, diferencia, producto y cociente
  - Composición de funciones
  - Funciones inversas

Quienes tengan conexión a internet. Repacemos y practiquemos	
• https://www.youtube.com/watch?v=jP1mSfUqpxw • https://www.youtube.com/watch?v=gy8VcUxPu3g	• https://www.youtube.com/watch?v=XeluJDX1cZQ • https://www.youtube.com/watch?v=jTio40P2NCw

Analiza las siguientes operaciones entre funciones

Suma

La imagen de x a través de la **suma** de las funciones f y g es la suma de las imágenes de cada una respectivamente, formalmente,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$Dom(f+g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

Ejemplo: Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = 5x$. Determine el dominio de la nueva función

$$(f+g)(x) = x^2 + 5x$$

Considerando que $Dom(f) = \mathbb{R}$ y que $Dom(g) = \mathbb{R}$, entonces concluimos que

$$Dom(f+g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

Diferencia

La imagen de x a través de la **resta** de las funciones f y g es la resta de las imágenes de cada una respectivamente, formalmente,

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$Dom(f-g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

Ejemplo: Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 7x+1$. Determine el dominio de la función diferencia

$$(f-g)(x) = \sqrt{x} - (7x+1)$$

Considerando que $Dom(f) = [0, +\infty)$ y que $Dom(g) = \mathbb{R}$, entonces concluimos que

$$Dom(f-g) = [0,+\infty) \cap \mathbb{R} = [0,+\infty)$$

Producto

La imagen de x a través del **producto** de las funciones f y g es el producto de las imágenes de cada una respectivamente, formalmente,

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

Ejemplo: Sean $f(x) = -e^{x-7}$ y $g(x) = \frac{1}{x+2} + 2$. Determine el dominio de la función

$$(f \cdot g)(x) = \left(-e^{x-7}\right) \cdot \left(\frac{1}{x+2} + 2\right)$$

Considerando que $Dom(f) = \mathbb{R}$ y que $Dom(g) = \mathbb{R} - \{-2\}$, entonces concluimos que

$$Dom(f-g) = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \{-2\}) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

Cociente

La imagen de x a través del **cociente** de las funciones f entre g es el cociente de las imágenes respectivas, formalmente,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right) = Dom(f) \cap Dom(g) - \{x : g(x) = 0\}$$

Ejemplo: Si $f(x) = x+4$ y $g(x) = x^2 - 1$

Entonces $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+4}{x^2-1}$. El dominio de f y el de g son los números reales. La función $g(x) = x^2 - 1$ es cero para x = 1 y x = -1. Por lo tanto el $Dom\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{-1,1\}$

Composición de funciones

Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. Componer ambas funciones significa obtener una nueva regla resultante de aplicar una función dentro de la otra. Con unos ejemplos lo entenderemos mejor.

Sea $f(x)=x^2$ y $g(x)=x-4$. Se define $g(x)$ compuesta con $f(x)$, y se escribe $(f\circ g)(x)\equiv f[g(x)]$, a la transformación:

$$(f\circ g)(x)\equiv f[g(x)]=f[x-4]=(x-4)^2$$

De igual forma, se define $f(x)$ compuesta con $g(x)$, y se escribe $(g\circ f)(x)\equiv g[f(x)]$, a la transformación:

$$(g\circ f)(x)\equiv g[f(x)]=g[x^2]=x^2-4$$

Dadas las Funciones $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$ $\quad g(x)=7x+5$

Calcular: $f\circ g$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=$$

sustituimos g(x) por su expresión en el lugar donde le correspondía la x en f(x):

$$=f(7x+5)=\frac{2.(7x+5)+3}{(7x+5)+1}=$$

Y en este caso, simplificar es mucho más sencillo, ya que sólo tenemos que resolver los paréntesis y reagrupar términos:

$$\boxed{=\frac{14x+13}{7x+6}}$$

Ahora calculemos $g\circ f$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=$$

Sustituimos f(x) por su expresión y después en la función g(x), en lugar de colocar la x, escribimos la expresión de la función f(x)

$$=g\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)=7\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)+5=$$

Hasta aquí ya habríamos obtenido la función compuesta.
Ahora vamos a operar para eliminar paréntesis y simplificar la expresión.
Multiplicamos el número por el paréntesis y obtenemos común denominador para sumar ambos términos:

$$=\frac{14x+21}{x+1}+5=\frac{14x+21+5x+5}{x+1}=\boxed{\frac{19x+25}{x+1}}$$

Sean las funciones:

$$f(x)=3x+2 \qquad g(x)=\frac{x+3}{2x+1}$$

1 $g\circ f$

$$g\circ f=g\,[f(x)]=g\,(3x+2)$$

$$=\frac{3x+2+3}{2(3x+2)+1}=\mathbf{\frac{3x+5}{6x+5}}$$

2 $f\circ g$

$$f\circ g=f\,[g(x)]=f\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)$$

$$=3\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)+2=\frac{3x+9}{2x+1}+\frac{2\cdot(2x+1)}{2x+1}$$

$$=\frac{3x+9}{2x+1}+\frac{4x+2}{2x+1}=\mathbf{\frac{7x+11}{2x+1}}$$

Funciones inversas

Se llama **función inversa** o **reciproca** de $f(x)$ a otra función $f^{-1}(x)$ que cumple que:

Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$

Veamos un ejemplo a partir de la función $f(x) = x + 4$

La función inversa de $f(x) = x + 4$ es $f^{-1}(x) = x - 4$ **porque la composición de las dos funciones es la función identidad**

$$g \cdot f = g[f(x)] = g(x + 4) = x + 4 - 4 = x$$

$f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ ➡ Cambiamos $f(x)$ por y ➡ $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$

Quitamos denominadores $y(x-1) = 2x + 3$

Resolvemos el paréntesis $xy - y = 2x + 3$

pasamos al primer miembro las x ➡ $xy - 2x = 3 + y$

Extraemos el factor común, es decir, la x ➡ $x(y-2) = 3 + y$

Ahora despejamos la x ➡ $x = \dfrac{y+3}{y-2}$

Cambiamos x por $f^{-1}(x)$ y obtendremos la función inversa $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

Vamos a comprobar el resultado para $x = 2$

$f(2) = \dfrac{7}{1} = 7$ $\qquad$ $f^{-1}(7) = \dfrac{10}{5} = 2$

Como $f(2)$ nos resulta 7 y $f^{-1}(7)$ nos resulta 2,

eso significa que la función inversa es correcta

Ahora en el cuaderno grafica $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo plano. Que obtienes?

ACTIVIDAD PRÁCTICA PARA TODOS

En el cuaderno Desarrolla

- **la actividad de la página 55 numerales 1 y 2**
- **la actividad de la página 57 numerales 2, 4 y 7**

- Toma registro fotográfico de la actividad desarrollada en el cuaderno
- envía a sayda.matematicas@gmail.com
- En asunto escribe "actividad 13 nombre y grado" *ejemplo : actividad 13 Pepito Pérez 1103*

Fecha máxima de entrega: viernes 25 de Septiembre

Ánimo