

PROPÓSITO:

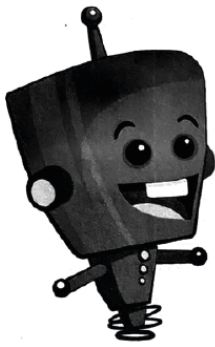
GUÍA 10

Identificar los conceptos de múltiplo, M.C.M, divisor, M.C.D, criterios de divisibilidad, números primos, números compuestos y descomposición en factores primos; aplicando los procesos en la solución de ejercicios y situaciones problema.

MOTIVACIÓN:

Criterios de divisibilidad por 4, 8 y 10

- Un número es **divisible por 4** si las cifras de las decenas y de las unidades forman un múltiplo de 4.
- Un número es **divisible por 8** si las cifras de las centenas, las decenas y las unidades forman un múltiplo de 8.
- Un número es **divisible por 10** si la cifra de las unidades es 0.

**Ejemplo**

Determinemos si el número 7 621 176 es divisible por 4, 8 o 10.

Solución

- Como 7 621 176 termina en 6, entonces **no** es divisible por 10.
- No siempre al utilizar los criterios de divisibilidad por 4 y 8 sabemos de inmediato si el número es divisible por 4 o por 8. En 7 621 176 necesitamos determinar si 176 es múltiplo de 8 y si 76 es múltiplo de 4. Resolvemos $176 \div 8$ y $76 \div 4$ para ver si el residuo es 0. Aunque hacemos una división, no necesitamos dividir el número original; por eso estos criterios son más útiles cuando tenemos números mayores. Como el residuo de $176 \div 8$ y $76 \div 4$ es cero, entonces 7 621 176 es divisible por 8 y por 4.

Al determinar que el número es divisible por 8 no necesitamos verificar para 4 porque todos los múltiplos de 8 son también múltiplos de 4.

**Desarrolla competencias**

- Determina si cada uno de los siguientes números es divisible por 4, 8 o 10. Justifica tus respuestas.
 - 204 996 645
 - 102 758 160
 - 2 036 712
 - 54 876 230
 - 5 025 036
- Escribe el conjunto de múltiplos de 4 y el conjunto de múltiplos de 8.
 - ¿Algún elemento en estos conjuntos es un número impar?
- Si un número es impar, ¿es múltiplo de 4 o de 8? ¿Por qué?
 - Si un número es impar, ¿es divisible por alguno de los números 2, 4, 6 u 8?
 - ¿Algún número impar es divisible por un número par? Explica.
- Escribe el conjunto de múltiplos de 3 y el de múltiplos de 5.
 - ¿Algún elemento en estos conjuntos es un número par?
 - ¿Algún número par es divisible por un número impar? Explica.

EXPLICACIÓN:

4. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tus respuestas.

- Cualquier número que es divisible por 8 también es divisible por 4.
- Cualquier número que es divisible por 4 también es divisible por 8.

5. Determina si cada uno de los siguientes números es divisible por 2, 3, 4, 5, 6, 8 o 10. Justifica tus respuestas.

- 19 413 240
- 752 820
- 635 080
- 7 768 890
- 620 976
- 51 740
- 31 044
- 7570

6. ¿Alguno de los siguientes números es divisible únicamente por uno de los números 2, 3, 4, 5, 6, 8 o 10? ¿Cuál o cuáles? Justifica tu respuesta.

- 7641
- 9028
- 38 205
- 103 454
- 128 845

7. Escribe en la siguiente tabla 10 números de cinco dígitos. Cada número escrito de manera horizontal (de izquierda a derecha) o vertical (de arriba hacia abajo) debe ser divisible por el número indicado.

	6	4	8	6	3
2					
8					
5					
10					
4					

8. Determina si alguna de las siguientes condiciones es un criterio de divisibilidad.

- Un número es divisible por 7 si termina en 7.
- Un número es divisible por 7 si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 7.
- Un número es divisible por 9 si termina en 9.

9. El criterio de divisibilidad por 9 es: un número es divisible por 9 si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 9. Utiliza el criterio anterior para decidir si los siguientes números son divisibles por 9.

- 67 653
- 52 182
- 310 212
- 543 241

Números primos y números compuestos

Un número natural diferente de cero es **primo** si tiene exactamente dos divisores diferentes y es **compuesto** si tiene más de dos divisores diferentes.

Ejemplo

Determinemos si los siguientes números son primos o compuestos: 29, 77, 1.

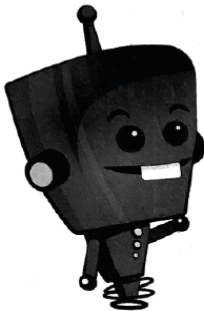
Solución

Hallamos los divisores de cada número.

Divisores de 29 = {1, 29}	Como 29 tiene exactamente dos divisores diferentes, entonces es un número primo.
Divisores de 77 = {1, 7, 11, 77}	Como 77 tiene más de dos divisores diferentes, entonces es un número compuesto.
Divisores de 1 = {1}	Como 1 tiene exactamente un divisor, entonces no es un número primo y tampoco es un número compuesto.

Recordemos que los conjuntos de múltiplos y divisores de 0 tienen características diferentes de los de los demás números naturales.

Cero **no** se considera primo ni compuesto.



EJERCICIOS:

Desarrolla competencias

- Determina si cada uno de los siguientes números es primo o compuesto.
 - 34 *Primo*
 - 25 *Primo*
 - 13 *Primo*
 - 11 *Primo*
 - 2 *Primo*
 - 72 *Compuesto*
- Escribe cuatro números naturales: dos números primos y dos números compuestos. Escribe el conjunto de divisores de cada uno de ellos.
 - ¿Qué número es común a todos los conjuntos que escribiste?
 - ¿Al conjunto de divisores de un número natural pertenece el mismo número natural? ¿Por qué?
- Completa la frase: al conjunto de divisores de cualquier número natural mayor que 1 pertenecen dos elementos que son 1 y el mismo número.
- Para determinar si un número es compuesto no necesitamos hallar todos sus divisores, es suficiente con hallar al menos tres de ellos que pueden ser 1, el mismo número y otro divisor diferente de los dos anteriores. Explica por qué los siguientes números son compuestos.
 - 67 581
 - 654 368
 - 943 075
 - 368 995
 - 361 740
 - 1 235 400

- Explica cómo podrían ayudarte los criterios de divisibilidad a responder la pregunta anterior.
 - Determina si 91 es un número primo o compuesto.
 - Como 91 no es divisible por ninguno de los números para los que conocemos criterios de divisibilidad, ¿podemos afirmar que 91 es un número primo? Explica.
 - Explica en qué casos los criterios de divisibilidad son útiles para determinar si un número es compuesto.
 - ¿Usar únicamente los criterios de divisibilidad es suficiente para determinar que un número es primo? Explica.

- Escribe todos los números pares mayores que 0 y menores que 20. ¿Cuáles de ellos son primos?
 - ¿Un número par mayor que 2 es primo? ¿Por qué?
 - ¿Cuántos números pares son primos?
 - ¿Todos los números impares son primos? Justifica tu respuesta.
 - ¿Cuál es el menor número primo?
- ¿Un múltiplo de 3 mayor que 3 es un número primo? Explica.
 - 4913 es múltiplo de 17. ¿Es un número primo? ¿Por qué?



- Una manera de hallar los números primos menores que 100 es utilizando un método desarrollado por un matemático griego llamado **Eratóstenes**.
 - En la tabla de abajo, colorea los números primos menores que 10.
 - Tacha los múltiplos de 2 mayores que 2, los múltiplos de 3 mayores que 3, los múltiplos de 5 mayores que 5 y los múltiplos de 7 mayores que 7. Para hallar fácilmente los múltiplos de 7 puedes contar de 7 en 7 desde 7.
 - Los números que quedaron sin tachar son los números primos menores que 100.

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

- ¿Cuál es el siguiente número primo después de 7?
 - ¿Cuál es el primer múltiplo de 11 mayor que 11 que no es divisible por 2, 3, 5 ni 7?
 - ¿Por qué en el ejercicio anterior solo utilizamos los números primos menores que 10?



Competencias de pensamiento crítico y resolución de problemas



- Cuando Margarita intenta organizar sus libros en dos o más grupos iguales se da cuenta de que no hay manera de hacerlo porque siempre queda un grupo con distinto número de libros. ¿Cuántos libros puede tener

Margarita si son más de 80 pero menos de 100?

EVALUACIÓN:

Mínimo común múltiplo



El **mínimo común múltiplo** de dos o más números naturales es el menor múltiplo común de todos los números, diferente de cero. Podemos hallarlo de varias formas; dos de ellas son las siguientes.

Método 1: escribiendo los primeros múltiplos de cada número hasta hallar el menor múltiplo diferente de cero común a todos los números.

Método 2: usando la descomposición en factores primos de los números compuestos y multiplicando los factores necesarios para formar cada uno de los números, incluidos los números primos si los hay, sin repetir factores que no sean necesarios.

Ejemplo

Hallemos el mínimo común múltiplo de 4, 5 y 6.

Solución

Método 1: escribimos algunos de los primeros múltiplos de cada número.

Múltiplos de 4 = {0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, **60**, 64, 68, ...}

Múltiplos de 5 = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, **60**, 65, 70, ...}

Múltiplos de 6 = {0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, **60**, 66, 72, ...}

El menor múltiplo común de 4, 5 y 6 diferente de cero es 60.

El mínimo común múltiplo de 4, 5 y 6 es 60 y escribimos m.c.m. (4, 5, 6) = 60.

Cualquier múltiplo de 60 es múltiplo de los tres números.

Método 2: usamos la descomposición en factores primos de cada uno de los números compuestos y el número primo 5.

Desarrolla competencias

- Halla el mínimo común múltiplo de los siguientes números usando conjuntos de múltiplos.
 - 8 y 10
 - 5 y 7
 - 4 y 12
 - 6, 8 y 9
- Halla el mínimo común múltiplo de los siguientes números usando descomposición en factores primos.
 - 12 y 10
 - 45 y 30
 - 36 y 42
 - 45, 18 y 7
- Si tenemos dos números podemos hallar su mínimo común múltiplo tomando cada múltiplo de uno de los números y viendo si es múltiplo del otro. Por ejemplo, para hallar m.c.m. (15, 9) vemos que 15 no es múltiplo de 9, y que 30 tampoco lo es, pero 45 sí. Entonces m.c.m. (15, 9) = 45. Halla mentalmente el mínimo común múltiplo de los siguientes números.
 - 6 y 9
 - 6 y 8
 - 3 y 4
 - 5 y 6
- ¿Cuál es el menor múltiplo común de 8 y 6?
 - ¿Cuál es el menor múltiplo común de 10 y 4?



Cálculo mental

- ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 8 y 6?
- ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 10 y 4?
- ¿Por qué en la definición de mínimo común múltiplo de dos o más números se incluye la condición de ser diferente de cero?
- Si $\star$ y $\circ$ representan números naturales y $\star$ es múltiplo de $\circ$, completa: m.c.m. ($\star$, $\circ$) = _____.
 - Si un número es múltiplo de otro, ¿cuál es el mínimo común múltiplo de los dos números?
- Escribe dos números primos y halla su mínimo común múltiplo.
 - ¿Cómo puedes hallar fácilmente el mínimo común múltiplo de dos o más números primos?
- Explica por qué no tiene sentido hablar del mínimo común múltiplo de un número natural.
 - Explica por qué nunca hablamos del máximo común múltiplo de dos o más números.

Competencias de pensamiento crítico y resolución de problemas

- En una actividad, los estudiantes de quinto grado se organizan en círculo y uno de ellos va contando de 1 a 100. Cada vez que diga un múltiplo de 9, Melisa debe saltar y cada vez que diga un múltiplo de 12, salta Nicolás. ¿En algún momento saltan Melisa y Nicolás al mismo tiempo? Explica.
- De un pequeño aeropuerto sale un vuelo cada tres días para Medellín, un vuelo cada cuatro días para Montería y uno cada seis días para Quibdó. ¿Cada cuántos días salen en un mismo día, vuelos para las tres ciudades?



Pensamiento crítico

BIBLIOGRAFÍA:

Máximo común divisor



El **máximo común divisor** de dos o más números naturales es el mayor divisor común de todos los números. Podemos hallarlo de varias maneras; dos de ellas son las siguientes.

Método 1: escribiendo los divisores de cada número para hallar los comunes y escoger el mayor de ellos.

Método 2: multiplicando los factores primos comunes a todos los números tantas veces como se repitan.

Ejemplo

Hallemos el máximo común divisor de 56, 84 y 140.

Solución

Método 1: escribimos los divisores de cada número.

Divisores de 56 = {1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56}

Divisores de 84 = {1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84}

Divisores de 140 = {1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140}

El mayor divisor común de 56, 84 y 140 es 28.

El máximo común divisor de 56, 84 y 140 es 28 y escribimos m.c.d. (56, 84, 140) = 28.

Cualquier divisor de 28 es divisor de los tres números.

Método 2: descomponemos cada número en sus factores primos.

$$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$$

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

$$140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$$

La descomposición en factores primos del máximo común divisor de 56, 84 y 140 debe estar formada únicamente por los factores primos comunes, que son 2 y 7, teniendo en cuenta que 2 aparece dos veces como factor común.

El máximo común divisor de 56, 84 y 140 es $2 \times 2 \times 7 = 28$, que es la respuesta obtenida con el método anterior.



Desarrolla competencias

- Halla el máximo común divisor de los siguientes números escribiendo los divisores de cada número.
 - 24 y 36
 - 21 y 28
 - 35, 20 y 45
 - 18, 27 y 54
 - 45, 30, 75 y 105
- Halla el máximo común divisor de los siguientes números usando descomposición en factores primos.
 - 90 y 135
 - 60 y 270
 - 132, 220 y 308
 - 144, 324 y 180
 - 104, 117 y 325
- Escribe los divisores de 21 y los divisores de 10.
 - ¿Cuáles son sus divisores comunes? ¿Cuál es el máximo común divisor de 21 y 10?
 - Escribe la descomposición en factores primos de 21 y 10. ¿Cuáles factores primos tienen en común?
 - Cuando dos o más números no tienen factores primos en común, ¿cuál es su máximo común divisor? Explica.
- Halla m.c.d. (11, 7).
 - ¿Cuál es el máximo común divisor de dos números primos diferentes? ¿Por qué?
 - ¿Es posible que el máximo común divisor de dos números no exista? Explica.
- Escribe los siguientes conjuntos por extensión.
 - Divisores de 36
 - Divisores de 60
 - Divisores de 90
 - Halla los divisores comunes de
 - 36 y 60
 - 36 y 90
 - 60 y 90
 - 36, 60 y 90
- ¿Cuál es el menor divisor común de cada conjunto de números del literal anterior?
 - Explica por qué no es necesario hallar el mínimo común divisor de dos o más números.
- En algunos casos, los criterios de divisibilidad nos pueden ayudar a hallar el máximo común divisor de dos o más números. Por ejemplo, 42 y 54 son divisibles por 6. Como $42 = 6 \times 7$ y $54 = 6 \times 9$ y 7 y 9 no tienen factores primos en común, entonces m.c.d. (42, 54) = 6. Halla mentalmente el máximo común divisor de los siguientes números.
 - 24 y 15
 - 130 y 110
 - 30 y 48
 - 27, 12 y 21
- Si $\odot$ y $\blacklozenge$ representan números naturales y $\odot$ es divisor de $\blacklozenge$, entonces m.c.d. ($\odot$, $\blacklozenge$) = _____.
 - Si un número es divisor de otro, ¿cuál es el máximo común divisor de los dos números?