PROPÓSITO:

GUIA 3

Reconoce la estructuras conceptuales y de procedimiento relacionadas con la solución de derivadas.

MOTIVACIÓN:

Para entender mejor el tema por favor observe con atención el siguiente vídeo:

EXPLICACIÓN:

5.2.2 *Regla de la cadena*

Consideremos la función $H(x) = (x^2 - 1)^3$. Hasta el momento, para derivar la función sólo podemos desarrollar el cubo del binomio y luego derivar, así:

$$H(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$$

$$\text{Entonces } H'(x) = 6x^5 - 12x^3 + 6x$$

¿Qué ocurriría si nos correspondiera derivar $H(x) = (x^2 - 1)^{12}$?
No tenemos hasta el momento un método sencillo para calcular esta derivada.
La regla de la cadena nos proporciona una técnica eficiente para derivar esta función y muchas otras semejantes.
Comencemos por observar que la función H puede expresarse como $H(x) = [f(x)]^n$ donde

$$f(x) = (x^2 - 1) \text{ y } n = 12$$

Recordando la regla para $f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$, podemos suponer que la derivada de $(x^2 - 1)^{12}$ es $12(x^2 - 1)^{11}$. Desafortunadamente esto no es cierto y lo podemos verificar en la función $(x^2 - 1)^3$.

Si $H(x) = (x^2 - 1)^3 \longrightarrow H'(x) = 3(x^2 - 1)^2 = 3(x^4 - 2x^2 + 1)$
Resultado **diferente** al obtenido por el proceso conocido.
En realidad, la regla correcta para derivar $H(x) = [f(x)]^n$ es $H'(x) = n \underbrace{[f(x)]^{n-1}}_{\text{derivada externa}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{derivada interna}}$

> **Regla de la cadena para funciones de potencias:**
> *Para cualquier número n. . .*
> *Si* $H(x) = [f(x)]^n \longrightarrow H'(x) = n f[(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

EJEMPLO 1

Empleemos la regla de la cadena para hallar la derivada de $H(x) = (x^2 - 1)^3$.

SOLUCION

Entonces: $H'(x) = 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 - 1)^2$ (¿Corresponde al mismo resultado obtenido inicialmente? Verifícalo).

EJEMPLO 2

Con la regla de la cadena, calcular la derivada de $H(x) = (x^2 - 1)^{12}$

SOLUCION

Entonces $H'(x) = 12(x^2 - 1)^{11} \cdot (2x) = 24x(x^2 - 1)^{11}$

Vemos que es mucho más fácil usar la regla de la cadena y además la respuesta resulta en forma factorizada.

EJEMPLO 3

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$. Determinar $f'(x)$

SOLUCION

Notamos que $f(x) = (x^2 - 2)^{1/2}$

Por regla de la cadena: $f'(x) = 1/2\ (x^2 - 2)^{-1/2}\ (2x)$ Por lo tanto: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$

EJERCICIOS:

EJERCICIO

Aplica la regla de la cadena para calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $F(x) = (x^4 + 7x - 2)^5$
2. $H(t) = \sqrt{t+1}$
3. $G(n) = \sqrt[3]{n^2 + 4}$
4. $T(x) = \sqrt[5]{(x+1)^2}$
5. $F(x) = (x^{-2} + 2x - 1)^{3/7}$
6. $I(x) = (5x - 1)^2$
7. $J(y) = 3(y^2 - \frac{y}{2} + 4)^2$
8. $K(x) = (1 - x + x^3)^2$
9. $L(y) = \frac{2}{3}(\frac{y^4}{4} - 5y^2)^3$
10. $M(v) = (v^3 - v^{-3})^3$

EVALUACIÓN:

En el espacio de tarea por favor enviar resueltos los ejercicios dejados anteriormente.

BIBLIOGRAFÍA: