PROPÓSITO:

GUIA 4

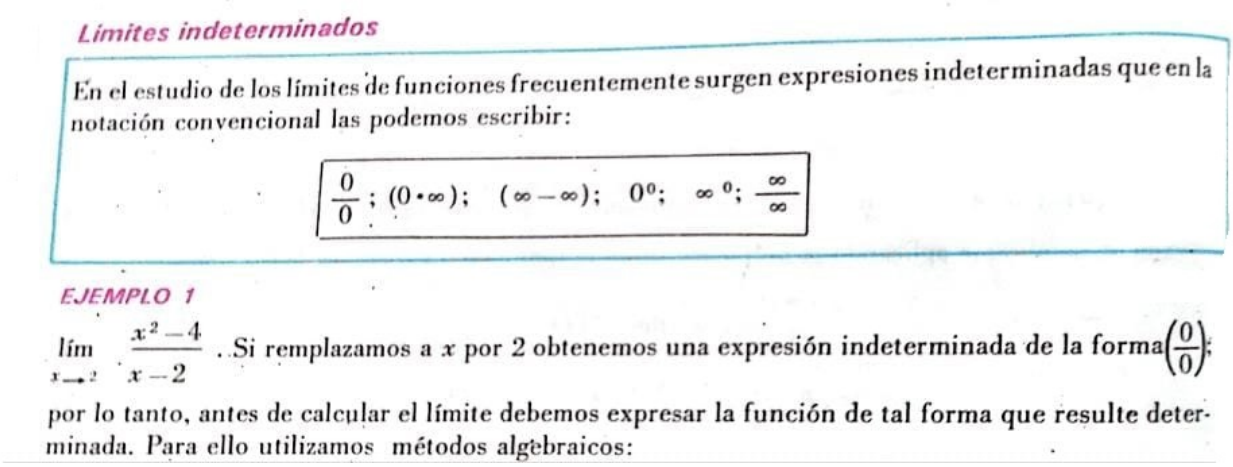
Reconoce la estructuras conceptuales y de procedimiento relacionadas con la solución de inecuaciones y las aplica en la solución de ejercicios.

MOTIVACIÓN:

Para entender mejor el tema por favor observe con atención el siguiente vídeo:

https://www.youtube.com/watch?v=CkVXbU-PNRs

EXPLICACIÓN:



Límites indeterminados

En el estudio de los límites de funciones frecuentemente surgen expresiones indeterminadas que en la notación convencional las podemos escribir:

$$\frac{0}{0};\ (0\cdot\infty);\quad (\infty-\infty);\quad 0^0;\quad \infty^0;\quad \frac{\infty}{\infty}$$

EJEMPLO 1

$\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Si remplazamos a x por 2 obtenemos una expresión indeterminada de la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$; por lo tanto, antes de calcular el límite debemos expresar la función de tal forma que resulte determinada. Para ello utilizamos métodos algebraicos:

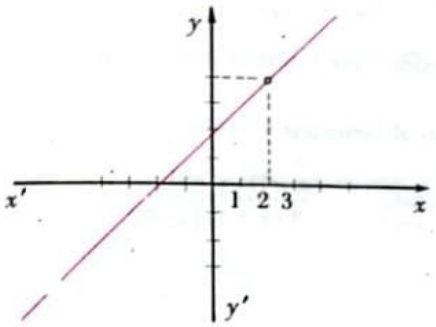


Figura 4-7

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

Cancelando $x-2$, obtenemos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

En este ejemplo hemos **factorizado** el numerador y evitamos la indeterminación al cancelar $x-2$.

EJEMPLO 2

Calcular $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$; al calcular $f(3)$ obtenemos una indeterminación de la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$, que es necesario evitar. En este caso también factorizamos:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+4)}{(x-2)\cancel{(x-3)}}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+4}{x-2} = \frac{3+4}{3-2} = \frac{7}{1} = 7$$

EJEMPLO 3

$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$. Al igual que en los dos ejemplos anteriores, obtenemos una indeterminación de la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$. Para evitarla, no podemos factorizar la expresión. Esto nos obliga a multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

Por ejemplo, el conjugado de $a+b$ es $a-b$ y el conjugado de $\sqrt{x^2+3}-2$ es $\sqrt{x^2+3}+2$. Por lo tanto el límite lo calculamos de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2+3)-4} =$$

$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1}$, el límite de esta expresión todavía es indeterminado, por lo tanto, factorizamos el denominador y simplificamos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1} = 2$$

EJEMPLO 4

$\lim_{x\to 1} \left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$. Si remplazamos a x por 1, obtenemos una expresión de la forma $(\infty-\infty)$ cuyo límite es indeterminado; por lo tanto, efectuamos la sustracción de las fracciones, para tratar de suprimirla.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2x(x-1)-(x^2-1)}{(x^2-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2x-x^2+1}{(x^2-1)(x-1)}=$$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{(x^2-1)(x-1)}$; hemos llegado ahora a otra expresión cuyo límite es indeterminado de la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$; por lo tanto, suprimimos esta indeterminación al factorizar y simplificar:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{(x^2-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x^2-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)\cancel{(x-1)}}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

EJERCICIOS:

EJERCICIOS

Calcula los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$
2. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$
3. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$
4. $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^2-2ax+a^2}$ $a\neq 0$
5. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$
6. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}$
7. $\lim_{x\to 5}\frac{1-\sqrt{x-4}}{x-5}$
8. $\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{x+2}}{x-2}$
9. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^5}{1-x}$
11. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}$
13. $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}$
14. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$
15. $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$
16. $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-2x-35}{x^2+3x-10}$
17. $\lim_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{10-x}}{x-1}$
18. $\lim_{x\to a}\left(\frac{2x}{x^2-a^2}-\frac{1}{x-a}\right)$
19. $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

EVALUACIÓN:

En el espacio de tarea por favor enviar resueltos los ejercicios dejados anteriormente.

BIBLIOGRAFÍA:

Matemática práctica editorial voluntad matematica 2000 editorial voluntad.