PROPÓSITO:

GUIA 3

> Reconoce la estructuras conceptuales y de procedimiento relacionadas con el calculo de limites de funciones.

MOTIVACIÓN:

Para entender mejor el tema por favor observe con atención el siguiente vídeo:

EXPLICACIÓN:

Cálculo de los límites

Propiedades de los límites

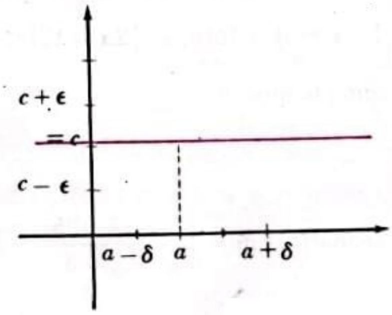
Las propiedades de los límites de las sucesiones, conducen a propiedades similares de los límites de funciones. Estas propiedades facilitan el cálculo de los límites, reduciéndolos a funciones muy sencillas.

Si f y g son dos funciones, tales que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, nótese que consideramos los límites de las dos funciones en el mismo valor a. Entonces:

1. $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$
2. $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2$
3. $\lim_{x \to a} [nf(x)] = n \lim_{x \to a} f(x) = nL_1$
4. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$
5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, siempre que $L_2 \neq 0$
6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^k = (\lim_{x \to a} [f(x)])^k = (L_1)^k$, donde $k \in \mathbb{R}$

Límite de una función constante

En el ejemplo 1 de la sección 4.2, discutimos el límite de la función $f(x) = 3$, cuando x tendía a 1, y observamos que $\lim_{x \to 1} 3 = 3$. Vamos ahora a formalizar esta idea:



> Si f es la función constante definida por $f(x) = c$, entonces su límite en cualquier punto a es c.
>
> $$\lim_{x \to a} c = c$$

EJEMPLO

Calcular $\lim\limits_{x \to 7} 9$; como $f(x) = 9$, tenemos que $\lim\limits_{x \to 7} 9 = 9$.

4.4.3 Limite de la función idéntica

El límite de la función idéntica, $f(x) = x$, en cualquier punto a es a.

$$\lim_{x \to a} x = a$$

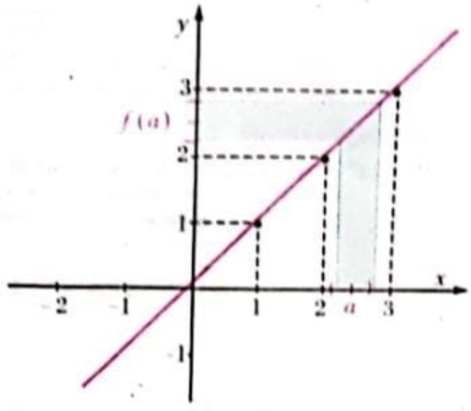


Figura 4-6

DEMOSTRACION

Sea $\epsilon > 0$ cualquier número positivo.

$|f(x) - a| < \epsilon$ equivale a $|x - a| < \epsilon$, entonces al tomar $\delta = \epsilon$ se cumple la afirmación.

EJEMPLOS

$\lim\limits_{x \to 2} x = 2$; $\lim\limits_{x \to \pi} x = \pi$; $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$; $\lim\limits_{x \to -3} x = -3$.

4.4.4 Límite de la función lineal: $f(x) = mx + b$

El límite de la función lineal $f(x) = mx + b$, cuando x tiende a "a" es: $f(a) = ma + b$.
Simbólicamente: $\lim\limits_{x \to a} (mx + b) = ma + b = f(a)$.

DEMOSTRACION

Aplicando las propiedades 1 y 3 del límite de funciones tenemos:

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = \lim_{x \to a} mx + \lim_{x \to a} b = m \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} b = ma + b = f(a)$$

EJEMPLOS

$\lim\limits_{x \to 3} (2x - 7) = 2(3) - 7 = -1$; $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 1) = 3(2) + 1 = 7$; $\lim\limits_{x \to 6} (4x - 11) = 4(6) - 11 = 13$

4.4.5 Limite de la función cuadrática

El límite de la función $f(x) = x^2$, en cualquier punto a es a^2.

DEMOSTRACION

Al aplicar la propiedad del límite de un producto de funciones y el límite de la función idéntica tenemos:

$$\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} (x \cdot x) = \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x = a \cdot a = a^2$$

EJEMPLO :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+5x-24}{x^2-2x+7} = \frac{\lim_{x \to 3} \left(x^2+5x-24\right)}{\lim_{x \to 3} \left(x^2-2x+7\right)} = \frac{0}{10} = 0$$

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \frac{\lim_{x \to 2} \left(x^2+4\right)}{\lim_{x \to 2} \left(x^2-4\right)} = \frac{8}{0} \quad \text{(no existe)}$$

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 5} \frac{2x^2-3}{x^2-1} = \frac{\lim_{x \to 5} \left(2x^2-3\right)}{\lim_{x \to 5} \left(x^2-1\right)} = \frac{47}{24}$$

EJERCICIOS:

EJERCICIOS

Calcula los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to 2} (3x^2-x+4)$
2. $\lim_{x \to -3} (2x^3-x)$
3. $\lim_{x \to 6} (x^2-36)(x-7)$
4. $\lim_{x \to 0} (x+4)(x-5)$
5. $\lim_{x \to -1} \sqrt{x^2-1}$
6. $\lim_{x \to -2} (5x^2-7x+8)$
7. $\lim_{x \to -1} (2x^3+2x^2-3x+1)$
8. $\lim_{x \to -2} (5x^2-2x+6)$
9. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x-14}{x^2-3x+4}$
10. $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^3-27}}{x+3}$
11. $\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2-2}}$
12. $\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x^2-2x+1}}$
13. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2-2x+7}}{\sqrt{x^2+7}}$

EVALUACIÓN:

En el espacio de tarea por favor enviar resueltos los ejercicios dejados anteriormente.

BIBLIOGRAFÍA:

Matematica practica editorail voluntad.

https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/calculo-limites/#:~:text=Para%20calcular%20el%20límite%20de,a%20la%20diferencia%20de%20cuadrados).&text=Esta%20función%20no%20está%20definida%20en%20x%3D2.&text=El%20valor%20de%20este%20límite%20es%204%2F3.