PROPÓSITO:

Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.

Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones Polinómicas, Racionales y de sus derivadas.

MOTIVACIÓN:

Recordemos funciones

https://es.educaplay.com/recursos-educativos/65444...

https://blogsaverroes.juntadeandalucia.es/matemati...

EXPLICACIÓN:

Sigue en orden cada una de las siguientes instrucciones

PASO 1

DEL LIBRO PAGINA 32, 33, 34 y 36:Lectura –análisis y Resumen sintético en el cuaderno

Concepto de función formas de definir una función Puntos de corte Signos de una función Simetría respecto al eje de ordenadas Simetría respecto al origen de coordenadas

Repacemos y practiquemos

- https://www.youtube.com/watch?v=Ll7xfe3HoZE
- https://www.youtube.com/watch?v=H40lcwlgPMk
- https://www.youtube.com/watch?v=7VoMs0tYmOQ
- https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/funciones/simetria-de-una-funcion.html
- https://matematica.laguia2000.com/general/simetria-de-una-funcion

En la secuencia Ejercicios observa PASO 1

PASO 2

DEL LIBRO PAGINA 38, 39, 42 y 43: Lectura –análisis y Resumen sintético en el cuaderno

Funciones Polinómicas Características de las Funciones Polinómicas de la forma $f(x) = x^n$ Funciones Racionales Asíntotas Características de las Funciones Racionales de la forma $f(x) = \frac{1}{x^n}$

Repacemos y practiquemos

- **https://www.youtube.com/watch?v=pd7ZSI6w5lg**
- **https://www.youtube.com/watch?v=0waASxoLbBI**
- **https://www.youtube.com/watch?v=4PWf27vLNQs&t=22s**
- **https://www.youtube.com/watch?v=jepckdwtT1s**

En la secuencia Ejercicios observa PASO 2

PASO 3

DEL LIBRO PAGINA 46, 47, 50 y 52: Lectura –análisis y Resumen sintético **en el cuaderno**

Función Exponencial propiedades de la función exponencial $f(x) = b^x$
Funciones Exponenciales de la forma $f(x) = ab^x$ Función logarítmica Propiedades de la función logarítmica
Funciones definidas a trozos Funciones Valor absoluto y parte entera

Repacemos y practiquemos

- https://www.youtube.com/watch?v=IhsZKreUPE0
- https://www.youtube.com/watch?v=0Cm-q5KH5jY
- https://www.youtube.com/watch?v=AU1GVkYD78w
- https://www.youtube.com/watch?v=DBRZAbwvuLM
- https://www.youtube.com/watch?v=bhbEkn5VytA

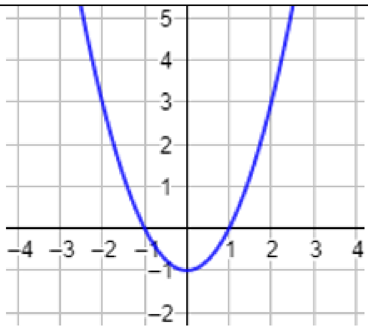
En la secuencia Ejercicios observa PASO 3

EJERCICIOS:

PASO 1

Analicemos las siguientes funciones: Hallemos: Dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes y Simetría

$f(x) = x^2 - 1$ Primero representemos la función



Dominio: notamos que para cualquier valor de x encontramos un valor en la función, por lo tanto $D(f) = \mathbb{R}$

Rango o Recorrido: el rango de una función cuadrática siempre estará restringido para empezar sobre el (vértice) valor mínimo o debajo del valor máximo. Para la función, el rango es $R(f) = [-1, \infty)$ observa en la gráfica que **y** funciona para valores mayores e iguales a -1

Puntos de corte con el eje X

Igualamos a 0 la función y factorizamos para encontrar las raíces $f(x) = x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0$

Igualamos a 0 cada factor y obtenemos los valores de x que hacen 0 a la función, obteniendo $x = 1 \; y \; x = -1$ observa la gráfica.

Puntos de corte con el eje Y

Basta sustituir a x por 0 $f(0) = 0^2 - 1 = -1$

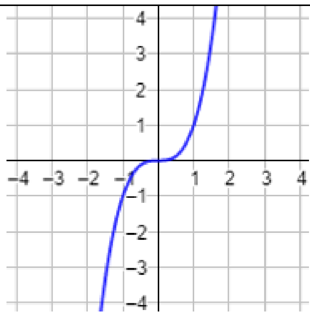
Note que en la gráfica atraviesa al eje y en -1

Simetría:

Si es simétrica **respecto al eje y** entonces debe cumplir que $f(-x) = f(x)$

Veamos con $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ y $f(1) = 1^2 - 1 = 0$ ahora como $0 = 0$ es simétrica respecto al eje y por lo tanto **es par**

$f(x) = x^3$ Primero representemos la función



Por simple inspeccion notamos cada uno de los elementos pedidos en el ejercicio

Dominio: notamos que para cualquier valor de x encontramos un valor en la función, por lo tanto $D(f) = \mathbb{R}$

Rango o Recorrido: en esta función y toma todos los valores desde $-\infty$ *hasta* ∞ por tanto $R(f) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje X

Igualamos a 0 la función $f(x) = x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

Puntos de corte con el eje Y

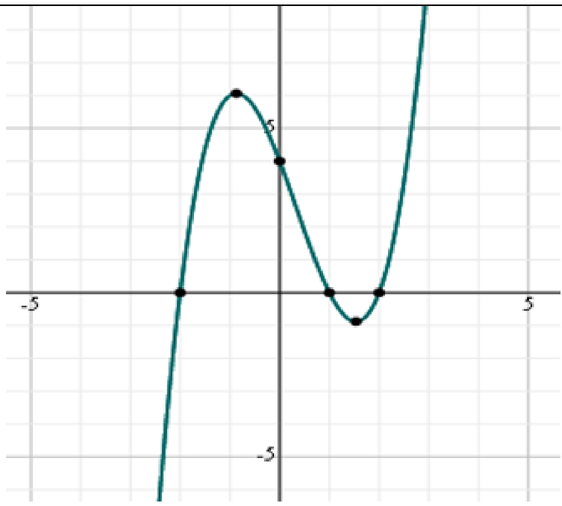
Basta sustituir a x por 0 $f(0) = 0^3 = 0$, Note que en la gráfica atraviesa al eje y en 0

Simetría:

Si es simétrica **respecto al origen** entonces debe cumplir que $f(-x) = -f(x)$

Veamos con $f(-1) = (-1)^3 = -1$ y $-f(1) = -\left[1^3\right] = -1$, como $f(-1) = -f(1)$, $-1 = -1$ podemos afirmar que la función es simétrica respecto al origen, por lo tanto **es impar**

$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ Primero representemos la función
Dominio: notamos que para cualquier valor de x encontramos un valor en la función, por lo tanto $D(f) = \mathbb{R}$
Rango o Recorrido: en esta función y toma todos los valores desde $-\propto$ $hasta$ $\propto$ por tanto $R(f) = (-\propto, \propto) = \mathbb{R}$
Puntos de corte con el eje X
Igualamos a 0 la función y factorizamos para encontrar las raíces $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x+2) = 0$
Igualamos a 0 cada factor y obtenemos los valores de x que hacen 0 a la función, obteniendo $x = 1, x = 2$ y $x = -2$, observe la gráfica.
Puntos de corte con el eje Y
Basta sustituir a x por 0 $f(0) = 0^3 - 0^2 - 4.0 + 4 = 4$
Note que en la gráfica atraviesa al eje y en 4
Simetría:
Si es simétrica **respecto al eje y** entonces debe cumplir que $f(-x) = f(x)$
Veamos con $f(1) = 1^3 - 1^2 - 4.1 + 4 = 0$ ahora
$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 4(-1) + 4 = 6$ como $0 \neq 6$ no es simétrica respecto al eje y por lo tanto **no es par**



Si es simétrica **respecto al origen** entonces debe cumplir que $f(-x) = -f(x)$
Veamos con $f(-3) = (-3)^3 - (-3)^2 - 4(-3) + 4 = -20$ ahora
$-f(3) = -((3)^3 - (3)^2 - 4(3) + 4) = -10$, como $-20 \neq -10$ no es simétrica respecto al origen por lo tanto **no es impar**

PASO 2

La Función Polinómica se clasifican en:

1. Función constante

Una función Polinómicas de grado 0 se denomina **función constante** y su forma general es $f(x) = k$

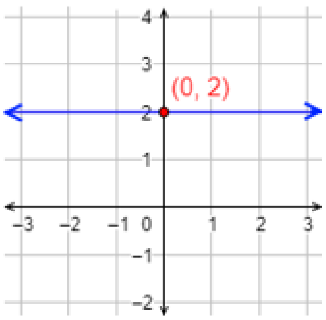
La gráfica de una función constante es una **recta horizontal** (paralela al eje de abscisas).

Corta el eje de ordenadas en un punto: (0,k). Sólo corta al eje de abscisas si k=0, en cuyo caso coincide con el eje x.

Ejemplo

$$f(x) = 2$$

El punto de corte con el eje de ordenadas es (0,2). No corta al eje de abscisas.



2. Función lineal

Una función polinómica de grado 1 se denomina **función lineal** y tiene la forma general $f(x) = mx + b$

El coeficiente m se denomina **pendiente** y el termino independiente b, **intercepto con el eje Y**.

La gráfica de una función lineal es una **recta oblicua** (recta no horizontal ni vertical).

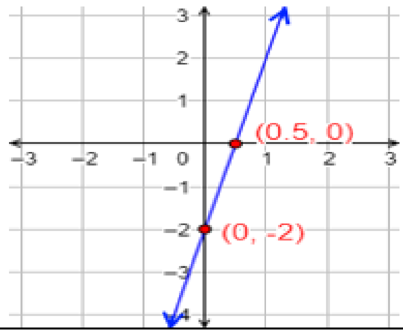
Corta al eje de ordenadas en el punto (0,b) También, corta al eje de abscisas en un punto.

Ejemplo

$$f(x) = 4x - 2$$

La recta es creciente (de izquierda a derecha) porque la pendiente $m = 4$ es positiva.

El punto de corte con el eje de abscisas es (0.5,0) y con el eje de ordenadas es (0,−2)



3. Función cuadrática

Una función polinómica de grado 2 se denomina **función cuadrática** y tiene la forma general $f(x) = ax^2 + bx + c$

La gráfica es una **parábola**.

Una función cuadrática corta al eje de ordenadas en el punto (0,c)

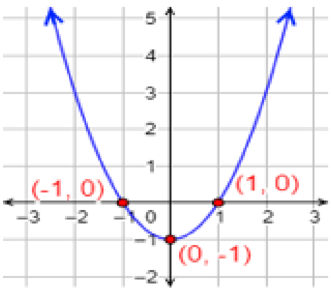
Toda función cuadrática presenta un extremo absoluto (máximo o mínimo) en $x = -\frac{b}{2a}$ Este extremo se denomina **vértice**.

Ejemplo

$$f(x) = x^2 - 1$$

El punto de corte con el eje de ordenadas es (0,−1). El vértice de la parábola también es (0,−1).

Los puntos de corte con el eje de abscisas son (−1,0) y (1,0). Observad que las primeras coordenadas



4. Función cúbica

Una función polinómica de grado 33 se denomina **función cúbica** y tiene la forma general $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

La gráfica es una **curva cúbica**.

Corta al eje de ordenadas en el punto (0,d)

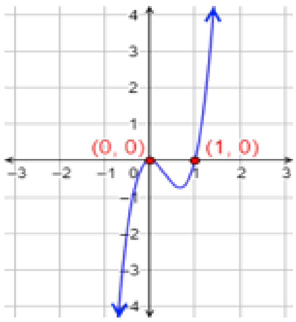
Puede cortar al eje de abscisas en tres, dos o un punto, dependiendo de las soluciones de la ecuación cúbica asociada.

Ejemplo

$$f(x) = 5x^3 - 5x^2$$

Los puntos de corte con el eje de abscisas son (0,0) y (1,0).

El punto de corte con el eje de ordenadas es (0,0)



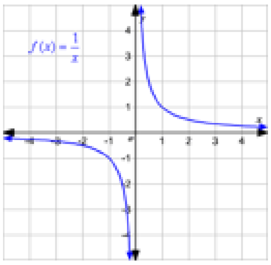
Función Racional:

Una función racional está definida como el cociente de polinomios en los cuales el denominador tiene un grado de por lo menos 1. En otras palabras, debe haber una variable en el denominador.

La forma general de una función racional es $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y $q(x) \neq 0$

Ejemplos: $f(x) = \frac{3}{x}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+5}$ El **dominio** de una **función racional** lo forman todos los números reales menos los valores de x que anulan el denominador. Recuerda " jamás dividirás por 0"

ejemplo 1: $f(x) = \frac{1}{x}$ La gráfica es una hipérbola.



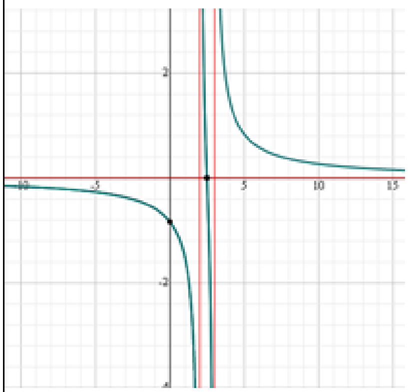
El dominio y rango es el conjunto de todos los números reales excepto 0.

Dominio : $\{x | x \neq 0\}$

Rango : $\{y | y \neq 0\}$

Ejemplo 3: $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$

Para averiguar el dominio basta con igualar a 0 el denominador para calcular los valores de x que lo anulan así: $x^2 - 5x + 6 = 0$ factorizando obtenemos: $(x-3)(x-2) = 0$ **Por lo tanto los valores excluidos de x son** $x = 3$ y $x = 2$ $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$



El rango de esta **función** se evidencia fácilmente en la **gráfica**, notamos que Y no tiene valores excluyentes, por lo tanto: $R(f) = \mathbb{R}$ Otra forma es sustituir a x por infinito ya que a medida que $|x|$ se incrementa el valor de la función se aproxima a la asíntota horizontal

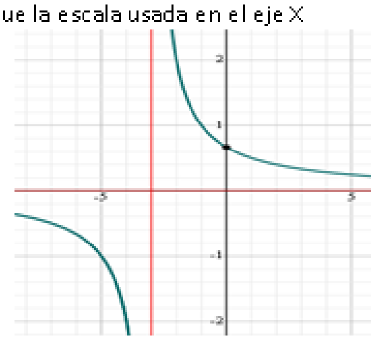
***ejemplo* 2**: $f(x) = \frac{1}{x+3}$, para iniciar el análisis de esta función racional es necesario averiguar primero el dominio, basta con igualar a 0 el denominador para calcular los valores de x que lo anulan así: $x + 3 = 0$

Por lo tanto el valor crítico de x es $x = -3$ este valor deben ser excluido del dominio de la función. Por lo tanto $D(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, \infty) = \mathbb{R} - \{-3\}$

Significa que la recta $x = -3$ es una asíntota vertical

Una **asíntota** es una recta que se acerca a la gráfica de la función, pero nunca la toca. Para representar este tipo de funciones es necesario representar primero las asíntotas en este caso la única asíntota (recta roja).

Para representar esta grafica nótese que la escala del eje Y es mayor que la escala usada en el eje X



Por inspección visual podemos hallar la asíntota horizontal $y = 0$ otra forma de calcular el valor excluyente del rango seria despejando x así: $f(x) = \frac{2}{x+3} \rightarrow y = \frac{2}{x+3} \rightarrow$ $x = \frac{2}{y} - 3$ El valor critico es $y = 0$ por lo tanto el rango de la función es $R(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

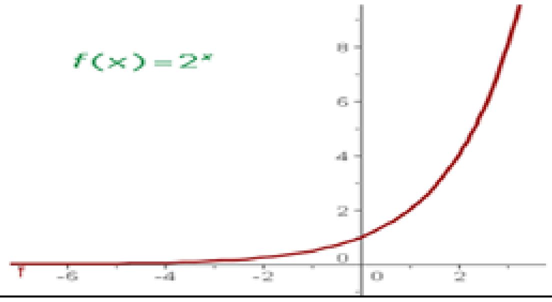
PASO 3

Función Exponencial

Escritas de la forma $f(x) = b^x$, siempre que b sea un número Real positivo distinto de 1

En el siguiente ejemplo note que la gráfica corta el eje de ordenadas en un punto: (0,1). Y el eje x se convierte en asíntota horizontal. Podemos afirmar que esta función asciende y es positiva en su totalidad

$D(f) = \Re$, $\boldsymbol{R(f)} = (\mathbf{0}, \infty)$

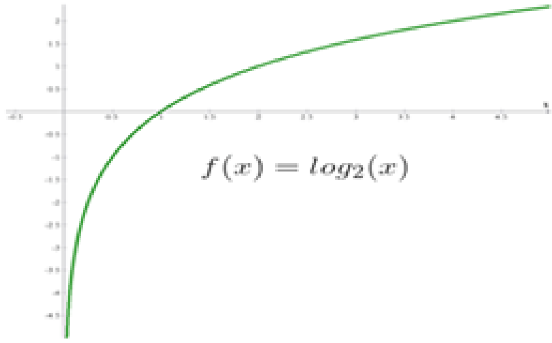


Función logarítmica

Su forma es $f(x) = \log_a x$ donde a es diferente de 0 y $a^{f(x)} = x$

Notamos que la gráfica corta al eje X en (1, 0) y el eje Y es asíntota vertical de la grafica

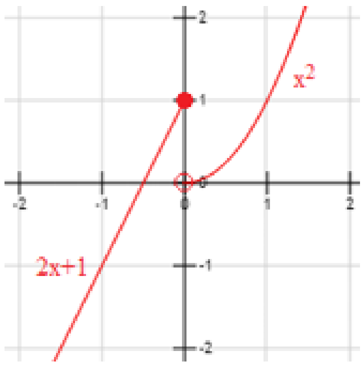
$D(f) = (\mathbf{0}, \infty)$, $\boldsymbol{R(f)} = \Re$



Función Definida a trozos

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si\, x \leq 0 \\ x^2 & si\, x > 0 \end{cases}$

En esta función, si la variable toma un valor menor o igual que 0, la definición de la función es $2x + 1$, mientras que si toma un valor positivo la definición de la función es x^2



El punto sólido y el punto vacío de la gráfica indican que el valor de f en $x = 0$ es $f(0) = 1$ dado que x pertenece al primer intervalo de la definición de la función.

Corte con el eje Y (0,1)

Corte con el eje X: $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

$D(f) = \Re$, $\boldsymbol{R(f)} = \Re$

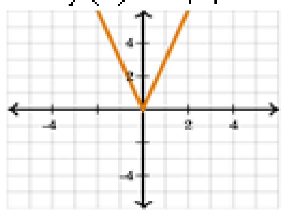
Función Valor absoluto

La función de valor absoluto tiene por ecuación $f(x) = |x|$, y siempre representa distancias; por lo tanto, siempre será positiva o nula.

Graficar esta función es sencillo, basta tabular.

Ejemplo

$f(x) = 3|x|$



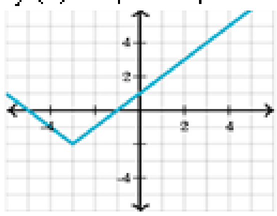
Los puntos de corte con el eje X y Y es (0,0)

$D(f) = \Re$, $\boldsymbol{R(f)} = (\mathbf{0}, \infty)$

Función totalmente positiva.

Esta función desciende en $(-\infty, 0)$ y asciende en $(0, \infty)$

$f(x) = |x + 3| - 2$



Los puntos de corte con el eje X en (-5,0)

Corte con el eje Y en (0,1)

$D(f) = \Re$, $\boldsymbol{R(f)} = [-\mathbf{2}, \infty)$

Signos de la función:

Positiva en $(-\infty\ -5) \cup (-1, \infty)$

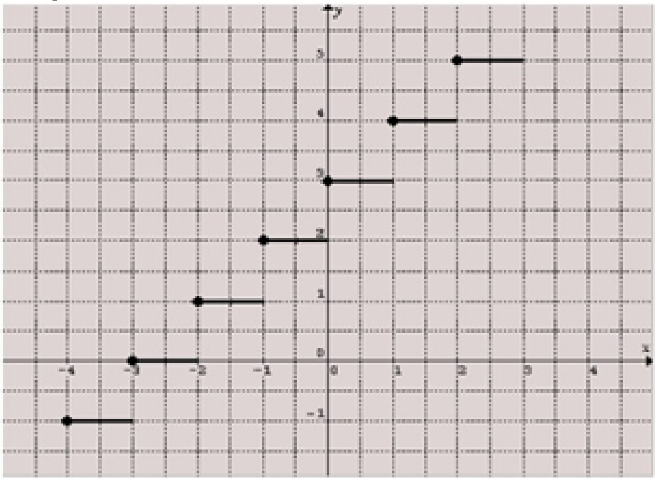
Negativa en $(-5, -1)$

Función Parte Entera:

La función parte entera, notada E o con corchetes, se define sobre el conjunto de los números reales así:
E(x) = [x], donde [x] es el mayor número entero inferior o igual a x, tal que: $[x] \leq x < [x] + 1$
Ejemplos: [1,4] = 1, [π] = 3 pues 3 ≤ π < 4

Al graficar la Función $f(x) = [x + 2] + 1$, *se obtiene*:

x	y
-3	0
-2	1
-1	2
0	3
1	4
1.3	4
1.5	4
1.9	4
2	5
3	6



Por inspección visual notamos que el corte con el eje Y es (0,3)
Y corta al eje X en el intervalo $[-3, -2)$

$(f) = \Re$, $R(f) = \mathbb{Z}$

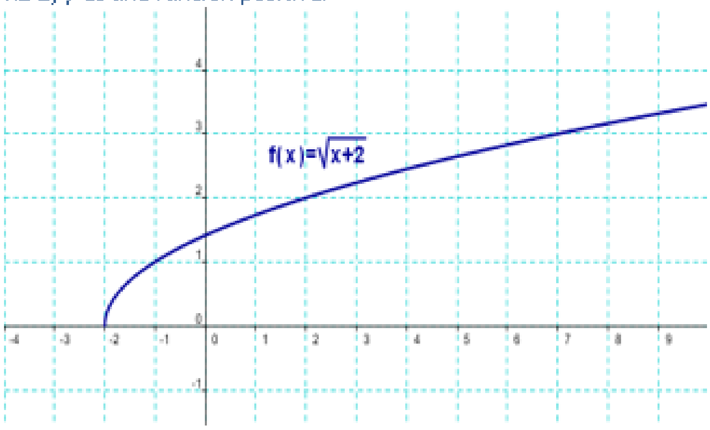
Esta función no es simétrica

Signos de la función:
Negativa en $(-\infty, -3)$
Positiva en $(-2, \infty)$

Función Radical:

Las funciones radicales son aquellas en las que la variable se encuentra bajo el signo radical. En esta práctica estudiaremos las funciones del tipo $f(x) = \sqrt{bx + c}$

Ejemplo:
Como podemos ver en la siguiente representación, cuyo dominio es x≥-2, y es una función positiva.



Corte con el eje X en (-2,0) (reemplazamos a **y** por 0) →
$y = \sqrt{x+2} \rightarrow 0 = \sqrt{x+2} \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

Corte con el eje Y en $(0, \sqrt{2})$ (reemplazamos a **x** por 0) →
$y = \sqrt{0+2} \rightarrow y = \sqrt{2}$

$D(f) = \cup [-2, \infty)$ $\quad$ $R(f) = [0, \infty)$

Signos de la función: Positiva

PASOS PARA REPRESENTAR UNA FUNCIÓN RADICAL

1º. En primer lugar, tenemos que determinar el dominio de definición de la función, que como ya sabemos, por tratarse de una raíz cuadrada serán todos los valores de x que hagan que el radicando sea mayor o igual que cero: bx+c≥0, luego serán todos los valores de x tales que: x≥-c/b, (recuerda al despejar la x, si b es negativa cambia el signo de la desigualdad).
2º. Una vez conocido los valores de x para los cuales existe función, tendremos que mirar si nuestra función es positiva o negativa, lo cual dependerá del signo de la raíz que hayamos elegido.
3º. Por último, comenzando en el punto (-c/b, 0), ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda, en la parte positiva o negativa, realizaremos un boceto de la función similar al de la imagen anterior azul. Si es necesario siempre podemos realizar una tabla de valores.
Esta función no es simétrica

EVALUACIÓN:

IXL Precalculus

A. Functions

- 1 Domain and range
- 2 Identify functions
- 3 Evaluate functions
- 4 Find values using function graphs
- 5 Complete a table for a function graph
- 6 Find the slope of a linear function
- 7 Graph a linear function
- 8 Write the equation of a linear function
- 9 Linear functions over unit intervals
- 10 Add, subtract, multiply, and divide functions
- 11 Composition of functions
- 12 Identify inverse functions
- 13 Find values of inverse functions from t
- 14 Find values of inverse functions from graphs
- 15 Find inverse functions and relations

C. Quadratic functions

- 1 Find the maximum or minimum value of a quadratic function
- 2 Characteristics of quadratic functions
- 3 Graph a quadratic function
- 4 Match quadratic functions and graphs
- 5 Solve a quadratic equation using square roots
- 6 Solve a quadratic equation by factoring
- 7 Solve a quadratic equation by completing the square
- 8 Solve a quadratic equation using the quadratic formula
- 9 Using the discriminant

D. Polynomials

- 11 Match polynomials and graphs
- 12 Domain and range of polynomials

E. Rational functions

- 1 Rational functions: asymptotes and excluded values

F. Exponential and logarithmic functions

- 1 Domain and range of exponential and logarithmic functions
- 2 Convert between exponential and logarithmic form
- 3 Solve exponential equations by rewriting the base
- 4 Evaluate logarithms

G. Radical functions

- 1 Domain and range of radical functions
- 2 Solve radical equations

BIBLIOGRAFÍA:

Libro de Matemáticas grado 11

https://tecevolucion.files.wordpress.com/2018/01/matematicas-11c2ba-vamos-a-aprender.pdf