PROPÓSITO:

GUÍA No 08

Identificar y aplicar los elementos geométricos

MOTIVACIÓN:

Elementos de la geometría

Ideas previas

1. ¿Cuál es el menor número de puntos que se necesitan para determinar una recta?
2. ¿Cuántos puntos crees que tiene una recta?
3. ¿Puedes trazar una recta completa sobre una hoja de papel?

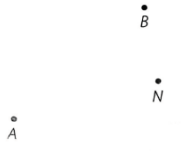


Figura 38.1

La noción de **punto** corresponde a la figura más simple que se estudia en geometría. Un punto no se puede definir, no tiene tamaño, pero sí ocupa un sitio. Se representa y nombra usando letras mayúsculas. En la figura 38.1, representamos los puntos *A*, *B* y *N*.

Toda figura geométrica es un conjunto de puntos y la figura más conocida es la recta. Una **recta** tiene infinitos puntos, se extiende en sentidos opuestos y no tiene fin, tampoco se puede definir y se nombra usando una letra minúscula o escogiendo las letras de los dos puntos de la recta.

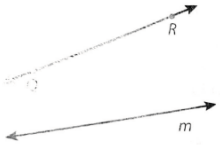


Figura 38.2

En la figura 38.2, vemos la representación de la recta *QR* y de la recta *m*. Cuando se usan dos puntos para nombrar una recta, como en el caso de la recta *QR*, escribimos $\overleftrightarrow{QR}$. Las flechas en cada punta indican que la recta se extiende sin límite.

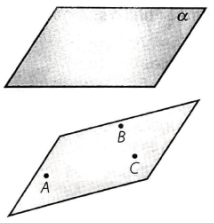


Figura 38.3

Otra figura geométrica que no se puede definir es el **plano**. También, tiene infinitos puntos, pero, al contrario de la recta, se extiende en muchas direcciones, no tiene fronteras; sin embargo, para representarlo en papel se usa una figura de cuatro lados. Un plano se nombra usando las letras de tres puntos que se encuentran en él y que no están en una misma recta. También, se puede utilizar una letra griega. En la figura 38.3, vemos el plano α (alfa) y el plano *ABC*.

Ejemplo 1

Algunos objetos que nos rodean pueden utilizarse para representar figuras geométricas. La superficie de la tableta puede considerarse una parte de un plano, una recta puede contener el borde de la tableta y las esquinas pueden ser los puntos (*ver* figura 38.4).

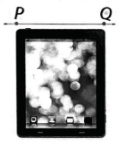


Figura 38.4

Ya conocemos las figuras con las cuales construiremos el mundo de la geometría. Nos falta establecer las relaciones que se establecen entre ellas, que se expresan como **postulados**, es decir, afirmaciones que vamos a aceptar como verdaderas.

En qué se aplica

El puntillismo es un estilo de arte practicado por varios artistas hacia finales del siglo XIX, entre los que se cuenta a Georges Seurat. Este procedimiento consistía en pintar puntos de colores sobre el lienzo, en lugar de usar pinceladas.

Postulado 1. De la recta

Dados dos puntos, existe exactamente una recta que los contiene.

Este postulado nos obliga a representar las rectas con líneas rectas, porque si fueran curvas, podrían pasar muchas rectas por los dos puntos. Por tanto, la situación que se ilustra en la figura 38.5 no es posible.

Figura 38.5

EXPLICACIÓN:

Postulado 2. De la intersección de rectas

Dos rectas se cortan en un único punto.

En la figura 38.6, la recta *l* y la $\overleftrightarrow{BC}$ se intersecan en el punto *P*.

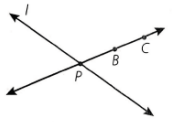


Figura 38.6

Postulado 3. De la llaneza del plano

Si dos puntos de una recta están en un plano, toda la recta está en el plano.

Este postulado nos obliga a representar los planos como superficies sin arrugas, porque las rectas no son curvas. Por tanto, la situación de la figura 38.7 no es posible.

Figura 38.7

Postulado 4. De la intersección del plano

Si dos planos tienen puntos en común, entonces, su intersección es una recta.

En la figura 38.8, los planos α y β se intersecan en la $\overleftrightarrow{XY}$.

Las líneas punteadas se usan para indicar la parte del plano que no podemos ver.

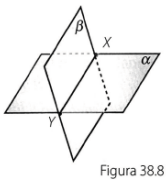


Figura 38.8

Postulado 5. Del plano

Si tres puntos no están en una misma recta, entonces, existe un único plano que los contiene.

Con estos postulados y la siguiente definición, estamos preparados para resolver algunas situaciones.

Definición

Cuatro o más puntos son **coplanares** si existe un plano que los contiene.

Ejemplo 2

Determinemos cuáles puntos de la figura 38.9 son coplanares y cuáles no.

Solución

Los puntos *A*, *Y*, *X* y *B* son coplanares, y *W* y *Z* no están en el plano α.

Por el postulado 5, *W* con cualquier otro par de puntos son coplanares y *Z* con cualquier otro par de puntos son coplanares; sin embargo, los puntos *A*, *X*, *Y* y *Z* no son coplanares.

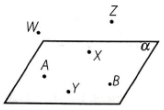


Figura 38.9

Ya vimos qué ocurre si tres puntos no están en la misma recta. Ahora, preguntémonos qué sucede cuando los puntos están en la misma recta.

En la figura 38.10, vemos que hay infinitos planos que los contienen.

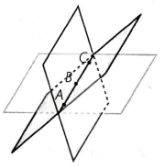


Figura 38.10

Ejemplo 3

Respondamos las siguientes preguntas de acuerdo con la información de la figura 38.11.

a. ¿La recta *l* pasa por el punto *P*?

b. ¿La intersección de la $\overleftrightarrow{BC}$ y la $\overleftrightarrow{AP}$ es el punto *B*?

c. ¿Los puntos *A* y *C* están en una misma recta?

d. ¿Existe solamente un plano que contiene a los puntos *A*, *P* y *B*?

e. ¿La $\overleftrightarrow{KP}$ está en el plano α?

f. ¿Existe un plano que contiene a los puntos *K*, *P* y *B*?

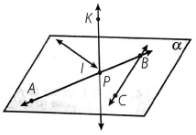


Figura 38.11

Solución

a. No podemos decidir si la recta *l* pasa por el punto *P*, porque aun cuando la recta *l* se extiende infinitamente y parece que *P* estaría en ella, no podemos asegurar que sea así.

b. Sí, en la figura se observa que el punto *B* está en ambas rectas.

c. Sí, aunque no se ha representado la recta, por el postulado 1, sabemos que esa recta existe.

d. No, como los tres puntos están en la misma recta, hay infinitos planos que la contienen.

e. No, porque solamente el punto *P* está en el plano α y el punto *K* está fuera del plano α.

f. Sí, como son puntos que no están en una misma recta, por el postulado 4, hay un plano que los contiene. En la figura 38.12, se representa ese plano.

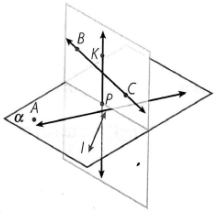


Figura 38.12

EJERCICIOS:

Desarrolla competencias

1. Nombra objetos de tu alrededor que representen lo que se indica.

a. Dos planos que se intersecan en una recta

b. Dos planos que no se intersecan

c. Tres planos que se intersecan en un punto

2. Dibuja cada situación descrita.

a. La $\overleftrightarrow{PQ}$ interseca al plano β en el punto W.

b. El plano λ contiene a la $\overleftrightarrow{CD}$ y a la $\overleftrightarrow{HJ}$ que se intersecan en el punto K.

c. Los planos α y β que se intersecan en la $\overleftrightarrow{MN}$.

3. Observa la figura 38.13. Determina cuántos planos contienen a la recta y el punto indicados en cada caso.

a. $\overleftrightarrow{EH}$ y punto F

b. $\overleftrightarrow{HT}$ y punto G

c. $\overleftrightarrow{PQ}$ y punto G

d. $\overleftrightarrow{EF}$ y punto K

e. $\overleftrightarrow{QF}$ y punto G

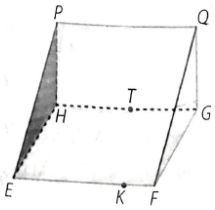


Figura 38.13

f. ¿Qué puedes afirmar sobre una recta y un punto que no está en ella?

4. Observa la figura 38.14. Determina los puntos que están en la misma recta.

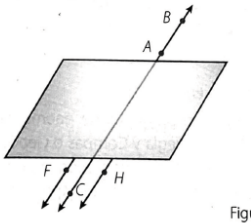


Figura 38.14

Razonamiento lógico

5. Observa la figura 38.15. Nombra todos los conjuntos de tres puntos que estén en la misma recta.

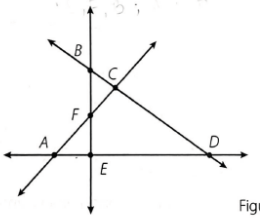


Figura 38.15

Resuelve los ejercicios 6 a 10 de acuerdo con la figura 38.16.

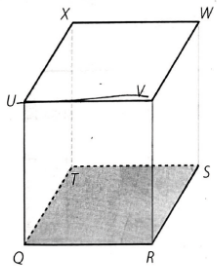


Figura 38.16

6. Nombra, si existe, un plano que contiene los objetos geométricos mencionados.

a. Puntos Q, V, R

b. Puntos X, V, R

c. Puntos U, V, W, X

d. Puntos W, V, Q, R

e. La $\overleftrightarrow{QT}$ y el punto X

f. La $\overleftrightarrow{RS}$ y el punto X

g. Las $\overleftrightarrow{XW}$ y $\overleftrightarrow{UV}$

h. Las $\overleftrightarrow{UV}$ y $\overleftrightarrow{WS}$

7. Nombra dos planos que se intersecan en $\overleftrightarrow{UV}$.

8. Nombra tres rectas que se cortan en el punto T.

9. Nombra otro punto que esté en el mismo plano que contiene a los puntos R, S y V.

10. ¿Cuántos puntos hay en el plano RVW?

11. Completa las frases con **siempre**, **a veces** o **nunca**. Busca que la afirmación sea verdadera.

a. Dos rectas _____ se intersecan en más de un punto.

b. Tres puntos _____ están en un único plano.

c. El punto F de la $\overleftrightarrow{EG}$ _____ está en el plano δ que contiene a la $\overleftrightarrow{EG}$.

d. Una recta _____ corta un plano en más de dos puntos.

12. Responde las preguntas de acuerdo con la figura 38.17.

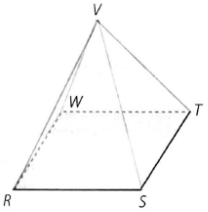


Figura 38.17

a. ¿Cuántos planos se determinan en la figura?

b. ¿Cuál es la intersección de los planos RST y VST?

c. ¿Cuál es la intersección de los planos RWV, TVS y RVS?

EVALUACIÓN:

Desarrolla competencias

1. Observa la figura 40.11 y determina cuántos rayos distintos se pueden nombrar. Establece cuáles son rayos opuestos.

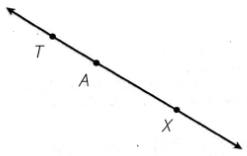


Figura 40.11

2. La $\overleftrightarrow{UV}$ pasa por el punto medio X del $\overline{YZ}$ en la figura 40.12.

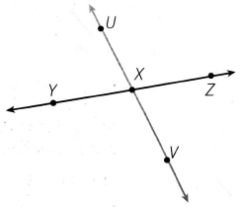


Figura 40.12

Determina si cada afirmación es verdadera o falsa. Explica tu respuesta.

a. La $\overleftrightarrow{UV}$ solo tiene 3 puntos.

b. $XY = XZ$.

c. El $\overrightarrow{UX}$ es el mismo que el $\overrightarrow{UV}$.

d. El $\overrightarrow{XU}$ y el $\overrightarrow{XV}$ son opuestos.

e. X es el punto medio de la $\overleftrightarrow{UV}$.

f. La intersección del $\overrightarrow{ZX}$ y el $\overrightarrow{YX}$ es el $\overline{YZ}$.

3. Construye un segmento congruente con cada uno de los segmentos dados.

a.

Figura 40.13a

b.

Figura 40.13b

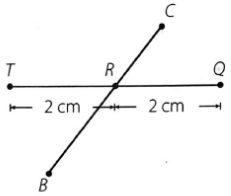
c.

Figura 40.13c

4. Representa con dibujos por qué la siguiente no es una buena definición de segmento.

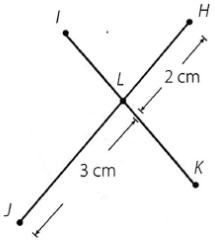
Segmento: una porción de una recta.

5. a. Observa las figuras 40.14a a 40.14d y define el concepto **bisecar** un segmento.



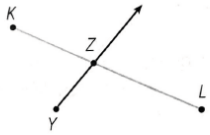
$\overline{BC}$ biseca al $\overline{TQ}$.

Figura 40.14a



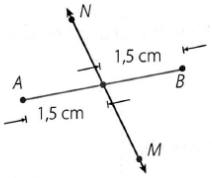
$\overline{JK}$ no biseca al $\overline{JH}$.

Figura 40.14b



$\overline{YZ}$ no biseca al $\overline{KL}$.

Figura 40.14c



$\overleftrightarrow{NM}$ biseca al $\overline{AB}$.

Figura 40.14d

b. De acuerdo con tu definición, ¿$\overrightarrow{GH}$ biseca al $\overline{LM}$?

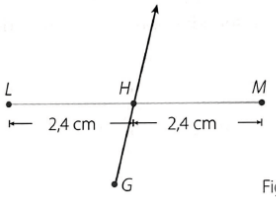


Figura 40.15

Olimpiadas Matemáticas

6. ¿Cuántas rutas posibles hay desde el inicio hasta el final? Adaptado de RUSSELL, Ken y CARTER, Philip. Juegos de ingenio. Barcelona: Ediciones Robinbook, 1998.

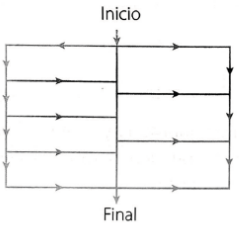


Figura 40.16

Razonamiento lógico

7. ¿Qué característica comparten las rectas y los rayos?

8. ¿Qué característica diferencia a las rectas de los rayos?

9. ¿Por qué no se puede hablar de la longitud de un rayo?

BIBLIOGRAFÍA: