PROPÓSITO:

GUÍA No 07

Resolver operaciones y situaciones problema en el conjunto de los números naturales.

MOTIVACIÓN:

Polinomios aritméticos

Ideas previas

Cinco amigos compraron 5 pasteles de pollo de $ 4500 cada uno y 3 jugos de $ 2700 cada uno. Si cada amigo contribuyó con la misma cantidad de dinero para pagar la cuenta, ¿cuánto dinero aportó cada uno?

Comúnmente, nos encontramos con expresiones como las siguientes:

$$\{[(15-8)+10]-9\}\times 5 \qquad \text{o} \qquad 2^3\times\sqrt{9}+6^2\div 3$$

En el primer caso, aparecen signos de agrupación y en el segundo no.

> Un **polinomio aritmético** es una expresión formada por números y operaciones.

Operaciones con signos de agrupación

Los signos de agrupación son: { }: llaves [ ]: corchetes ( ): paréntesis

Para calcular el valor de una expresión con signos de agrupación, procedemos de acuerdo con las siguientes reglas:

1.° Realizamos, de izquierda a derecha, las operaciones que están entre los paréntesis.
2.° Efectuamos las operaciones que están indicadas entre los corchetes.
3.° Finalmente, realizamos las operaciones indicadas entre las llaves.

Ejemplo 1

Calculemos la expresión: $\{[(15-8)+10]-9\}\times 5$.

Solución

$\{[(15-8)+10]-9\}\times 5$	Efectuamos la operación indicada entre el paréntesis: $15-8$.
$\{[7+10]-9\}\times 5$	Realizamos la operación indicada entre el corchete: $7+10$.
$\{17-9\}\times 5$	Efectuamos la operación indicada entre la llave: $17-9$.
$\{8\}\times 5$	Por último, realizamos la multiplicación que se plantea: 8×5.
40	

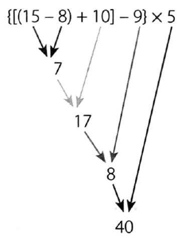


Figura 11.1

Un diagrama como el de la figura11.1 nos ayuda a seguir el orden en el que debemos efectuar las operaciones.

Operaciones sin signos de agrupación

Para calcular el valor de una expresión sin signos de agrupación, debemos proceder así: en primer lugar, calculamos las potencias y raíces; en segundo lugar, efectuamos las multiplicaciones y divisiones; y en tercer lugar, realizamos las adiciones y sustracciones.

Ejemplo 2

Calculemos la expresión $2^3\times\sqrt{9}+6^2\div 3$.

Solución

$2^3\times\sqrt{9}+6^2\div 3$	Calculamos la potencia 2^3, la raíz $\sqrt{9}$ y la potencia 6^2.
$8\times 3+36\div 3$	Realizamos la multiplicación 8×3 y la división $36\div 3$.
$24+12$	Calculamos la suma de 24 y 12.
36	

Desarrolla competencias

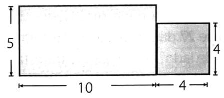
1. Calcula el valor de cada polinomio aritmético.
   - a. $165 - 32 \div 4 - 15 + 9$
   - b. $500 \div 5 - 250 \div 25 + 72 \div 9$
   - c. $12 \times 5 \times [(20 + 14) - 18] - 12$
   - d. $20 + 13 - 12 + 11 - 10 + 7 \times 5 - 12 \div 3 \times 2$
   - e. $100 - \{95 - [60 + (3 \times 4 + 5) + 2] + \sqrt{196} + \log_4 64 + 10\}$
   - f. $\{15 + [4(10 + 15) + 4 \times 3] - 1\} - [5(12 - 9) - 3]$
2. Reemplaza en cada expresión algebraica la letra por el número dado. Luego, simplifica y resuelve cada polinomio.
   - a. $y^5 + x - \sqrt[2]{49}$ — $y = 2; x = 3$
   - b. $(2z + v - 3)(3v)$ — $z = 4; v = 2$
   - c. $(m^{100} + n^4) + 10^0$ — $m = 1; n = 7$
   - d. $(5p)\log_3 81$ — $p = 8$
   - e. $(x)\log_r 3125$ — $r = 5; x = 3$
   - f. $\sqrt[5]{8w} + x^2$ — $w = 4; x = 6$

Entretenimiento

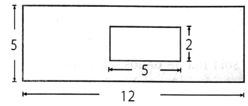
3. Ubica signos de agrupación y los signos +, − y × en los lugares adecuados, para que la expresión sea una igualdad.

   1 ▢ 2 ▢ 3 ▢ 4 ▢ 5 ▢ 6 ▢ 7 ▢ 8 ▢ 9 = 100

4. Escoge la expresión numérica que representa el área coloreada de cada figura.
   - a. $10 \times 5 + 4^2$
     $(4 + 10) \times 5$
     $10 \times 4 + 5 \times 4$



   - b. $(12 \times 5) - (5 \times 2)$
     $(12 + 5) \times (5 + 2)$
     $12 - 5 \times 2$



   - c. $20 \times 70 - 40 \times 20$
     $30 \times 40 - 40 \times 20$
     $70 \times 20 + 20 \times 30$

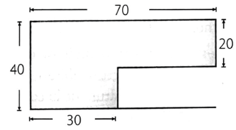


Figura 11.2

Pensamiento crítico y resolución de problemas

5. Escribe un polinomio aritmético que de solución a cada situación. Calcula su valor.
   - a. Para un almuerzo se solicitaron 3 lasagnas de \$ 16 550 cada una. Dos porciones de ravioli de \$ 20 900 cada una, dos limonadas de \$ 3800 cada una, un jugo de mandarina de \$ 5200 y uno de mango de \$ 4900. ¿De cuánto fue la cuenta?
   - b. Jorge tiene 2 años más que Luis. Eduardo tiene el doble de la edad de Jorge, y David 4 años más que Luis. Si las edades de los cuatro suman 45, ¿cuál es la edad de cada uno?

Resumen

Para simplificar un polinomio aritmético debemos (en orden, de izquierda a derecha).

1. Desarrollar las operaciones que están dentro de los signos de agrupación.
2. Resolver las potencias, raíces y logaritmos.
3. Realizar los productos y cocientes.
4. Efectuar las adiciones y sustracciones.

Evaluación digital

Múltiplos y divisores

Ideas previas

En una caja se e[illegible] 12, 13, 14 y 20 caja[illegible] [illegible]ero 12?

Un atleta entrena algunas veces en una pista de 4 km de longitud. La distancia recorrida en el entrenamiento depende del número de vueltas que dé alrededor de la pista, como se indica en la tabla 15.1.

Número de vueltas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Distancia recorrida (km)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	...

Tabla 15.1

Observemos que los números que aparecen en la segunda fila de la tabla se obtienen multiplicando 4 por cada número natural, es decir, la longitud de la pista por el número de vueltas realizadas.

EXPLICACIÓN:

Los **múltiplos** de un número natural son aquellos que se obtienen de multiplicar ese número por cada uno de los números naturales.
Si a es el número, la expresión M_a representa el conjunto de los múltiplos de a.

Un día, el atleta recorrió 36 kilómetros. ¿Cuántas vueltas le dio a la pista?

Para obtener el número de vueltas, dividimos la distancia recorrida entre la longitud de la pista, es decir, 36 entre 4.

$$\begin{array}{l|l} 36 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 9 \end{array}$$

El cociente es 9. Como el residuo de la división es cero, la división se denomina **exacta** y se dice que 4 divide exactamente a 36 o que 4 es un divisor de 36. Los números 4 y 9, cuyo producto es 36, se llaman factores de 36.

Un número natural a es **divisor** del número natural b si lo divide exactamente, es decir, si existe otro número natural c tal que $a \times c = b$. Los números a y c se denominan factores de b.
Si a es el número, la expresión D_a representa el conjunto de los divisores de a.

Ejemplo 1

Hallemos lo siguiente:

a. El conjunto de todos los múltiplos de 12.

b. El conjunto de todos los divisores de 12.

Solución

a. Los múltiplos de 12 son $M_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108\ldots\}$, porque son los productos que resultan de multiplicar a 12 por cada número natural.

b. Al dividir a 12 entre los números naturales menores o iguales que él, encontramos que las divisiones exactas son $12 \div 1 = 12$, $12 \div 2 = 6$, $12 \div 3 = 4$, $12 \div 4 = 3$, $12 \div 6 = 2$, $12 \div 12 = 1$. Por tanto, los divisores de 12 son los siguientes: $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Ejemplo 2

Determinemos el valor del factor z en la expresión $117 = 9 \times z$

Solución

Debemos encontrar un número z que multiplicado con 9 dé 117. Esto equivale a dividir 117 entre 9.

$$\begin{array}{r|l} 117 & 9 \\ \cline{2-2} 27 & 13 \\ 0 & \end{array}$$

El valor del factor z es 13, porque $9 \times 13 = 117$.

EJERCICIOS:

Desarrolla competencias

1. Completa cada afirmación con alguna de las siguientes palabras según corresponda: **múltiplo**, **factor** o **divisor**.

- **a.** Si un número divide exactamente a otro, se denomina ________.
- **b.** El producto de dos números es ________ de cualquiera de los dos factores.
- **c.** Si dos números se multiplican, cada uno de ellos es ________ del producto.

2. Escribe todos los divisores de cada uno de los siguientes números.

a. 8 **b.** 15 **c.** 25 **d.** 42
e. 27 **f.** 54 **g.** 72 **h.** 17

3. Escribe los diez primeros múltiplos de cada uno de los siguientes números.

a. 12 **b.** 15 **c.** 18 **d.** 19
e. 21 **f.** 26 **g.** 31 **h.** 105

4. Determina si cada afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

- **a.** Cero es múltiplo de cualquier número natural.
- **b.** Todos los números naturales son divisores de cero.
- **c.** Uno es divisor de cualquier número natural.
- **d.** La suma de dos múltiplos de un número también es múltiplo del número.
- **e.** El producto de dos múltiplos de un número también es múltiplo del número.

Razonamiento lógico

5. Escribe el factor que completa cada expresión.

a. $7 \times \square = 56$ **b.** $\square \times 9 = 63$
c. $\square \times 6 = 48$ **d.** $4 \times \square = 36$
e. $\square \times 12 = 96$ **f.** $8 \times \square = 112$
g. $\square \times 9 = 108$ **h.** $6 \times \square = 786$

6. Halla el valor que representa cada letra.

a. $8 \times t = 72$ **b.** $10 \times p = 70$
c. $12 \times m = 60$ **d.** $z \times 6 = 48$
e. $5 \times p = 45$ **f.** $4 \times m = 28$
g. $6 \times n = 42$ **h.** $s \times 3 = 27$

7. Escribe en cada caso un número que cumpla la condición dada.

- **a.** Tener solo dos divisores.
- **b.** Tener solo seis divisores.
- **c.** Ser un múltiplo de 14 mayor que 50.
- **d.** Ser divisor de 72 menor que 20.
- **e.** Ser un factor de 81 menor que 10.
- **f.** Ser el mayor divisor de 100.

Olimpiadas **Matemáticas**

8. ¿Qué valor debe tener r en la expresión $q = s \times p + r$ para que s y p sean divisores de q?

Criterios de divisibilidad

Ideas ...

... artículos. ¿Se pueden empacar ... una sin que sobre alguno?

Una manera de determinar si un número es divisible por otro es realizando la división. Sin embargo, existen ciertas reglas denominadas **criterios de divisibilidad** con las que podemos decidir si un número es divisible por otro sin necesidad de hacer divisiones.

Los criterios para determinar si un número natural es divisible por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u 11 son los siguientes:

Un **número es divisible** por

- **2** si la cifra de las unidades es par.
- **3** si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- **4** si el número que forman sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.
- **5** si la cifra de las unidades es 0 o 5.
- **6** si es divisible por 2 y por 3 a la vez.
- **7** si la diferencia entre el número que se obtiene al eliminar la cifra de las unidades y el doble del dígito de las unidades del número original es múltiplo de 7.
- **8** si el número que forman sus tres últimas cifras es múltiplo de 8.
- **9** si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
- **10** si la cifra de las unidades es 0.
- **11** si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar par y la suma de las cifras que ocupan lugar impar es 0 o múltiplo de 11.

Ejemplo 1

Determinemos si 8226 es divisible por 2, 3, 4, 5 y 6.

Solución

De acuerdo con los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5 y 6, podemos afirmar que 8226

- es divisible por 2, ya que la cifra de las unidades es par.
- es divisible por 3, porque $8 + 2 + 2 + 6 = 18$ y 18 es múltiplo de 3.
- no es divisible por 4, porque 26, que es el número que forman las dos últimas cifras, no es múltiplo de 4.
- no es divisible por 5, porque la cifra de las unidades no es 0 ni 5.
- es divisible por 6, porque es divisible por 2 y por 3 a la vez.

Ejemplo 2

Determinemos si

a. 322 es divisible por 7.

b. 53 427 es divisible por 11.

Figura 16.1

Solución

a. Eliminando la cifra de las unidades en 322, obtenemos 32. El doble del dígito de las unidades es 4. Para aplicar el criterio de divisibilidad por 7, efectuamos la sustracción $32 - 4 = 28$. Este resultado es múltiplo de 7, por tanto, 322 es divisible por 7.

b. Determinamos cuáles son los dígitos de las posiciones pares e impares en 53 427 (*ver* figura 16.1).

La suma de los dígitos en las posiciones pares es $3 + 2 = 5$.

La suma de los dígitos en las posiciones impares es $5 + 4 + 7 = 16$.

La diferencia $(16 - 5 = 11)$ es múltiplo de 11. Por tanto, 53 427 es divisible por 11.

Ejemplo 3

Determinemos si 1848 es divisible por 7, 9 y 10.

Solución

- 1848 es divisible por 7, porque el número que se obtiene al eliminar la cifra de las unidades de 1848 es 184; el doble de la cifra que se eliminó es $8 \times 2 = 16$. Y, además, la diferencia $(184 - 16 = 168)$ es múltiplo de 7 $(7 \times 24 = 168)$.
- 1848 no es divisible por 9, porque la suma de sus cifras es 21 y 21 no es múltiplo de 9.
- 1848 no es divisible por 10, porque la cifra de las unidades no es 0.

Desarrolla competencias

1. Utiliza los criterios de divisibilidad para determinar por cuáles números es divisible cada número de la columna izquierda de la tabla 16.1.

	Divisible por								
Número	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
732										
985										
1024										
6836										
12 454										
745 370										

Tabla 16.1

2. Escribe un dígito apropiado en el cuadro para que el número que resulte sea divisible por 3.

a. 38 ☐ **b.** 2 ☐ 38 **c.** 8 ☐ 5

d. 36 ☐ 7 **e.** 8672 ☐ **f.** 20 ☐ 6

g. ☐ 425 **h.** 4 ☐ 65 **i.** ☐ 123

3. Completa los espacios para que cada número sea divisible por 6.

a. 53 ☐ 8 **b.** 385 ☐

c. 4 ☐ 6 ☐ **d.** 9 ☐ 3 ☐ 2

e. 68 ☐ 7 ☐ **f.** 7 ☐ 4 ☐

4. Relaciona con una línea la oración de la izquierda con la frase de la derecha.

a. La suma de las cifras es un múltiplo de 3.	Divisible por 9
b. La cifra de las unidades es 0 o 5.	Divisible por 6
c. Las dos últimas cifras forman un múltiplo de 4.	Divisible por 7
d. La suma de las cifras es un múltiplo de 9.	Divisible por 5
e. Es a la vez múltiplo de 3 y de 2.	Divisible por 3
f. La cifra de las unidades es par.	Divisible por 4
	Divisible por 2

EVALUACIÓN:

Entretenimiento

5. Recorre el diagrama, desde la salida hasta la llegada, realizando las operaciones indicadas. Ten en cuenta lo siguiente:
   a. Se deben utilizar números de por lo menos dos cifras.
   b. No se puede pasar por el mismo segmento.
   c. No se puede retroceder.

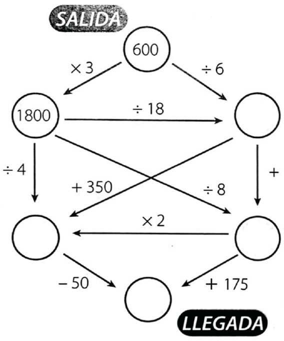


Figura 16.2

Pensamiento crítico y resolución de problemas

6. El número en el que cayó la lotería el mes pasado es divisible por tres. Este mes, el nuevo número tiene exactamente las mismas cifras del anterior, pero en distinto orden.
   a. ¿El nuevo número es divisible por tres?
   b. ¿Ocurre lo mismo si el número es divisible por dos?

7. La fábrica ARTECOL desea producir cierto número de artesanías para empacar en cajas con diferente capacidad sin que sobren artículos (*ver* tabla 16.2). Escribe en cada caso una cantidad que cumpla las condiciones dadas.

Número de artesanías	Número de artículos por caja							
	2	3	4	5	6	8	9	10
______	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
______	No	Sí	No	Sí	No	No	No	No
______	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No	Sí
______	Sí	No	Sí	No	No	Sí	No	No

Tabla 16.2

8. En un canal de televisión se transmite una propaganda cada 80 minutos. Si la primera vez aparece a las 4:00 p. m., ¿cuántas veces ha salido la propaganda al aire al terminar el día?

9. Carmenza tiene 850 galletas para empacar en paquetes de docena. ¿Cuántas docenas de galletas puede empacar? ¿Sobran galletas?

10. En una fábrica se producen arbolitos para maquetas, los cuales se empacan solamente en bolsas con capacidad para 6, 7, 8 u 11 unidades. Si hay 2156 arbolitos, ¿en cuáles bolsas se pueden empacar sin que sobre ningún arbolito? ¿Cuántas bolsas se utilizan para empacarlos?

11. El médico le recomendó a Carmen trotar 156 km al mes. Escribe 5 posibles formas de diseñar la rutina de trote para Carmen. Escoge la más adecuada.

Resumen

Los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u 11 se usan para determinar si dichos números son divisores de un número dado sin necesidad de efectuar la división.

Evaluación digital

BIBLIOGRAFÍA: