PROPÓSITO:

GUÍA No 06

Resolver operaciones y situaciones problema en el conjunto de los números naturales.

MOTIVACIÓN:

En una fábrica de dulces, utilizan tres tamaños de cajas para empacar los productos. En la caja de tamaño grande, pueden empacar 3 cajas medianas. Cada caja mediana solo puede contener 3 cajas pequeñas y en cada caja pequeña se pueden empacar 3 bolsas con 3 dulces cada una. ¿Cuántos dulces hay en 3 cajas grandes?

Para responder la pregunta, realicemos el siguiente análisis.

- 1 bolsa tiene 3 dulces.
- 1 caja pequeña tiene 3 bolsas: 3×1 bolsa $= 3 \times 3$ dulces.
- 1 caja mediana tiene 3 cajas pequeñas: 3×1 caja pequeña $= 3 \times 3 \times 3$ dulces.
- 1 caja grande tiene 3 cajas medianas: 3×1 caja mediana $= 3 \times 3 \times 3 \times 3$ dulces.
- 3 cajas grandes tienen $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ dulces, lo cual equivale a 243 dulces.

La expresión $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ podemos escribirla como 3^5, donde

$$\text{Base} \longrightarrow 3^{\overset{\uparrow}{5}} = 243 \longleftarrow \text{Potencia}$$

Exponente

La operación que consiste en multiplicar el mismo factor varias veces se denomina **potenciación**. Los términos de la potenciación son la **base**, que es el factor que se repite; el **exponente**, que indica el número de veces que se repite el factor en el producto; y la **potencia**, que es el resultado de la multiplicación.

Ejemplo 1

Escribamos como potencia cada expresión y determinemos cómo se lee.

a. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ **b.** $a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$

Solución

a. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$. Se lee así: dos elevado a la sexta potencia.

b. $a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$. Se lee así: a elevado a la séptima potencia.

Ejemplo 2

Calculemos cada potencia y escribamos el nombre de sus términos en la tabla.

a. 10^3 **b.** 7^4

Solución

	Potencia	Base	Exponente
$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$	1000	10	3
$7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$	2401	7	4

Propiedades de la potenciación

La potenciación de números naturales cumple las siguientes propiedades.

Propiedad	Explicación	Ejemplo
Exponente cero	Todo número natural, distinto de cero, elevado al exponente cero es igual a uno. $a^0 = 1$	$9^0 = 1$
Producto de potencias con bases iguales	El producto de potencias de igual base es igual a la misma base de los factores y el exponente es la suma de los exponentes. $a^n \times a^m = a^{n+m}$	$2^4 \times 2^2 = 2^{4+2} = 2^6$
Potencia de una potencia	La potencia de una potencia tiene como base la misma base y el exponente es el producto de los exponentes. $(a^n)^m = a^{n \times m}$	$(5^5)^6 = 5^{5 \times 6} = 5^{30}$
Potencia de un producto	La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$(3 \times 4)^9 = 3^9 \times 4^9$
Cociente de potencias con bases iguales	El cociente de potencias de igual base es igual a la potencia con la misma base y el exponente es la diferencia del exponente del dividendo y del divisor. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ con $m > n$	$\frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5^1$

Tabla 9.1

Ejemplo 3

Usemos las propiedades de la potenciación para calcular $\frac{3^2 \times (3^3)^2}{3^5}$.

Solución

$$\frac{3^2 \times (3^3)^2}{3^5} = \frac{3^2 \times (3^{3 \times 2})}{3^5} = \frac{3^2 \times 3^6}{3^5}$$

Aplicamos la propiedad potencia de una potencia.

$$= \frac{3^{2+6}}{3^5}$$

Aplicamos la propiedad producto de potencias de igual base.

$$= \frac{3^8}{3^5}$$

$$= 3^{8-5} = 3^3 = 27$$

Aplicamos la propiedad cociente de potencias de igual base y operamos.

Ejemplo 4

Usemos las propiedades de la potenciación para calcular el valor de x en $(2^5)^x = 2^{15}$.

Solución

$(2^5)^x = 2^{5 \times x} = 2^{15}$. Como $5 \times 3 = 15$, entonces, $x = 3$.

EXPLICACIÓN:

Desarrolla competencias

1. Completa la siguiente tabla.

	Potencia	Base	Exponente	Expresión
$8^4 = 8 \times 8 \times 8 \times 8$	4096	8	4	Ocho elevado a la cuarta potencia
		9	7	
				Once elevado a la tercera potencia
		72	1	
$15^3 = 15 \times 15 \times 15$				
$17^5 =$		17	5	
		20	2	Veinte elevado a la segunda potencia
$345^0 =$				

Tabla 9.2

2. Utiliza las propiedades de la potenciación para escribir una expresión equivalente a cada expresión dada.

a. $2^5 \times 2^{12} \times 2$ **b.** $(((8)^3)^2)^3$
c. $(3 \times 4 \times 5)^4$ **d.** $30^{17} \div 30^{14}$
e. 125^0 **f.** $7^6 \times 7^6 \times 11^5 \times 11^5$
g. $\frac{4^4}{4^2}$ **h.** $(1^9)^{10}$

Razonamiento lógico

3. Halla el valor de la incógnita que satisface cada igualdad.

a. $8^2 \times 8^x = 8^8$ **b.** $2^7 \times 2^w = 2^{11}$
c. $10^{10} \div 10^7 = 10^x$ **d.** $12^m \div 12^3 = 12^6$
e. $18^0 = m$ **f.** $20^y = 1$
g. $((3^3)^x)^3 = 3^{27}$
h. $11^x \times 3^x \times 2^x = (11 \times 3 \times 2)^3$

Competencias en TIC

4. Calcula las potencias que se indican utilizando tu calculadora, así: ubica la tecla de potenciación ∧ o $x^{\blacksquare}$, digita la base de la potencia que buscas, pulsa la tecla de potencias, ingresa el exponente y luego oprime =.

a. 13^8 **b.** $10^4 \times 5^6$
c. $2^5 \times 3^7 \times 11^2$ **d.** $10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2$

Pensamiento crítico y resolución de problemas

5. Rocío tiene 5 joyeros. Ella depositó en el primer joyero 4 anillos; en el segundo, cuatro veces la cantidad de anillos que colocó en el primero; en el tercer joyero, colocó nuevamente cuatro veces lo que guardó en el anterior y así sucesivamente. ¿Cuántos anillos guardó en total Rocío en los 5 joyeros?

6. Un cultivo de bacterias se duplica cada hora. Si inicialmente hay 1 bacteria, escribe el número de bacterias que se obtienen en el tiempo indicado.

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5	6
Número de bacterias	1						

Tabla 9.3

Resumen

La operación que consiste en multiplicar el mismo factor varias veces se llama potenciación. Los términos de la potenciación son la base, que es el factor que se repite; el exponente, que indica el número de veces que se repite el factor en el producto; y la potencia, que es el resultado de la multiplicación.

Evaluación digital

EJERCICIOS:

Radicación y logaritmación de números naturales

Ideas previas

Juanita elevó un número a la quinta potencia y obtuvo 243. ¿Qué número utilizó como base de esa potencia? Si Juanita eleva el número 2 a un determinado exponente y obtiene 256, ¿cuál es el exponente?

Un tapete de forma cuadrada recubre 1600 cm^2 de piso. ¿Cuánto mide el lado del tapete?

Como conocemos el valor del área, usamos la fórmula del área del cuadrado.

$A = l \times l = l^2$, donde l es la longitud del lado.

En este problema, conocemos la potencia y el exponente, pero desconocemos la base, es decir, la siguiente expresión representa nuestro problema: $1600 = l^2$

Como 40 es el único valor que cumple que $40 \times 40 = 40^2 = 1600$, entonces, el valor de l es 40 y la longitud del lado es 40 cm. Este proceso se conoce como **radicación**.

El proceso de hallar la base en una potencia, conocidos la potencia y el exponente, se denomina **radicación**. La radicación es una operación inversa de la potenciación. Formalmente, se define como $a = \sqrt[n]{b}$ si y solo si $a^n = b$.

Así, en la expresión $1600 = l^2$, tenemos que $\sqrt{1600} = 40$ y, por tanto, $l = 40$.

Ejemplo 1

Calculemos las raíces $\sqrt[3]{125}$ y $\sqrt{361}$.

Solución

a. $\sqrt[3]{125} = 5$, porque $5 \times 5 \times 5 = 125$.

b. $\sqrt{361} = 19$, porque $19 \times 19 = 361$.

Veamos un ejemplo de un procedimiento para calcular la raíz exacta de números mayores.

Ejemplo 2

Calculemos $\sqrt[3]{216}$.

Solución

Para empezar, descomponemos a 216 en factores primos.

216	2	Buscamos el menor número primo que divida exactamente a 216, en este caso, 2. Dividimos 216 entre 2 y ubicamos el cociente debajo de 216.
108	2	
54	2	Buscamos el menor número primo que sea divisor de 108, que es 2. Efectuamos la división de 108 entre 2 y ubicamos el cociente debajo de 108.
27	3	
9	3	Continuamos el proceso hasta que el cociente sea 1.
3	3	
1		

Como $216 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$, entonces, $\sqrt[3]{216} = 6$.

Para recordar

El número subíndice en la notación de los logaritmos corresponde a la base de la potencia respectiva. Si la base es 10, no se escribe este número, por ejemplo: $\log_{10} 100 = \log 100$.

Juanita elevó el número 4 a un determinado exponente y obtuvo 1024. ¿Cuál es el exponente?

En este caso conocemos la base y la potencia y debemos averiguar el exponente. La expresión correspondiente es $4^x = 1024$.

Ensayando, obtenemos que $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$. Entonces, el exponente es 5.

El proceso de hallar el exponente, conocida la base y la potencia, se denomina **logaritmación**. La logaritmación es otra operación inversa a la potenciación. Formalmente, se define como $n = \log_a b$ si y solo si $a^n = b$.

Ejemplo 3

Calculemos los logaritmos $\log_7 2401$ y $\log_5 125$.

Solución

a. Hallemos a qué potencia debemos elevar el número 7 para obtener 2401. Como $7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2041$, entonces, $\log_7 2401 = 4$.

b. $\log_5 125 = 3$, porque $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

Si se trata del logaritmo exacto de un número mayor, podemos obtenerlo como se indica en el siguiente ejemplo.

En qué se aplica

La potenciación modela fenómenos de crecimiento de poblaciones o problemas financieros. Por ejemplo, si una bacteria se duplica cada hora, el número de bacterias al cabo de 4 horas es 16.
Los logaritmos son útiles para establecer escalas relacionadas con la intensidad del sonido o de la luz, entre otros.

Ejemplo 4

Calculemos $\log_{15} 3375$.

Solución

Descomponemos 3375 en factores primos.

3375	3
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

Como $3375 = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3 = 15^3$, entonces, $\log_{15} 3375 = 3$.

Desarrolla competencias

1. Relaciona cada expresión con su resultado.

a.	$\sqrt[3]{64}$	7
b.	$\sqrt[4]{4096}$	3
c.	$\sqrt[5]{32}$	5
d.	$\sqrt{144}$	4
e.	$\log_9 729$	8
f.	$\log_2 128$	2
g.	$\log_5 3125$	12
		6

2. Completa la tabla 10.1.

Potencia	Raíz	Logaritmo
$13^2 =$		
	$\sqrt[8]{256} =$	
		$\log_8 4096 =$
$30^2 =$		
	$\sqrt[4]{81} =$	
		$\log_{10} 100\,000 =$

Tabla 10.1

EVALUACIÓN:

3. Utiliza el método de descomposición en factores primos para calcular la raíz indicada.

a. $\sqrt[5]{3125}$ **b.** $\sqrt{784}$

c. $\sqrt{1225}$ **d.** $\sqrt[7]{78\,125}$

e. $\sqrt{2304}$ **f.** $\sqrt[3]{1728}$

4. Utiliza el método de descomposición en factores primos para obtener el logaritmo indicado.

a. $\log_6 1296$ **b.** $\log_{12} 1728$

c. $\log_8 4096$ **d.** $\log_3 2187$

e. $\log_7 2401$ **f.** $\log_4 1024$

Razonamiento lógico

5. Explica por qué los siguientes logaritmos no tienen solución.

a. $\log_2 0$

b. $\log_3 0$

c. $\log_4 0$

d. $\log_a 0$, con a distinto de cero y uno.

6. Explica por qué la base de un logaritmo debe ser diferente de 1 y de 0.

7. Escribe cuatro números naturales cuya raíz cuadrada sea 3, 5, 6 y 7, respectivamente.

8. Escribe cuatro números naturales cuyo logaritmo en base tres sea 3, 5, 6 y 7, respectivamente.

Pensamiento crítico y resolución de problemas

9. La señora Gómez está cosiendo un vestido de baile. Para adornarlo, cosió lentejuelas en filas de acuerdo con la secuencia que muestra la tabla 10.2.

Número de filas	Número de lentejuelas
1	4
2	16
3	64
4	256

Tabla 10.2

¿Cuántas filas de lentejuelas puso en total si en la última gastó 4096 lentejuelas?

10. ¿Cuál es la longitud del lado de un cuadrado de área 441 cm^2?

11. Una caja cúbica tiene 1331 cm^3 de volumen. ¿Cuál es la medida de la arista de la caja?

12. ¿Cuál es el perímetro de la figura 10.1?

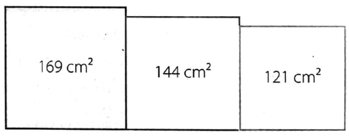

Figura 10.1

Resumen

	Potenciación	Radicación	Logaritmación
Base	Conocida	Desconocida	Conocida
Exponente	Conocido	Conocido	Desconocido
Potencia	Desconocida	Conocida	Conocida

Evaluación digital

BIBLIOGRAFÍA: