PROPÓSITO:

GUÍA 07

Apropiarse de los algoritmos de las diferentes operaciones de números naturales, concretamente de la Potenciación, Radicación y Logaritmación

MOTIVACIÓN:

Potenciación en los números naturales

La **potenciación** es una operación que consiste en multiplicar el mismo factor varias veces. El factor repetido se denomina **base**, la cantidad de veces que se repite la base se indica con un **exponente** y el resultado se denomina **potencia**.

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$$

$$\text{base} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{exponente}}}{7^4} = 2401 \longleftarrow \text{potencia}$$

Ejemplo

Hallemos el valor de cada potencia.

a. 6^2

b. 5^3

Solución

a. Para resolver 6^2 escribimos una multiplicación de dos factores iguales a 6, entonces $6^2 = 6 \times 6 = 36$.
Escribimos $\mathbf{6^2 = 36}$. En esta expresión la **base** es **6**, el **exponente** es **2** y la **potencia** es **36**.
La leemos como: la segunda potencia de 6 es 36. Cuando el exponente es 2, la potencia es el cuadrado de la base. En este caso, 36 es el cuadrado de 6 o el cuadrado de 6 es 36. Decimos que 36 es un **cuadrado perfecto**.

b. La expresión 5^3 significa que debemos escribir una multiplicación de tres factores; todos iguales a 5, entonces $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.
Escribimos $\mathbf{5^3 = 125}$. En esta expresión la **base** es **5**, el **exponente** es **3** y la **potencia** es **125**.
La leemos como: la tercera potencia de 5 es 125. Cuando el exponente es 3, la potencia es el cubo de la base. En este caso, 125 es el cubo de 5 o el cubo de 5 es 125. Decimos que 125 es un **cubo perfecto**.

Desarrolla competencias

1. Escribe cada operación como una multiplicación de factores iguales y resuélvela.

a. 8^4 b. 4^3 c. 2^7
d. 5^6 e. 3^5 f. 6^3
g. 10^4 h. 7^2 i. 9^3

2. Halla cada potencia y escribe cuáles son la base y el exponente.

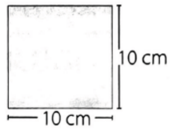
a. La cuarta potencia de 8
b. El cuadrado de 15
c. La quinta potencia de 6
d. El cubo de 12

3. Completa la tabla.

Base	Exponente	Potencia
3		27
5	4	
16	3	
	2	81
10	5	

Entretenimiento

4. En un trozo de cartulina dibuja y recorta un cuadrado de 10 cm por 10 cm. En el cuadrado dibuja una cuadrícula de tal manera que cada cuadrado interior mida 1 cm de lado.



Recorta por las líneas para obtener 100 cuadrados de 1 cm de lado y usa algunos para construir otros cuadrados sin dejar huecos y sin superponerlos.

a. ¿Es posible construir un cuadrado usando 10 cuadraditos? ¿Es posible con 9?

b. Completa la siguiente tabla.

Número de cuadrados de 1 cm de lado utilizados	4	9			36				100
Medida del lado del cuadrado construido (cm)	2		4			7		9	
Área del cuadrado construido (cm^2)	4			25			64		

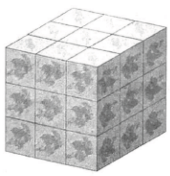
c. ¿Por qué crees que los números que aparecen en la primera fila de la tabla se denominan números cuadrados perfectos?

d. ¿Es 24 un número cuadrado perfecto? ¿Por qué?

e. Sin utilizar los cuadrados de cartulina, ¿cómo podrías encontrar un número cuadrado perfecto mayor que 100? Escribe algunos ejemplos.

Trabajo colaborativo

5. Reúnete con uno o dos compañeros y consigan cubitos de balso o dados del mismo tamaño. Construyan cubos usando los cubitos pequeños, sin dejar huecos, como se muestra en el ejemplo.



a. ¿Es posible construir cubos con 9 dados? ¿Y con 8? ¿Son 9 y 8 cubos perfectos?

b. ¿Es 6 el cubo de algún número? ¿Por qué?

c. Sin utilizar los dados, ¿cómo podrías encontrar un número natural que sea un cubo perfecto? Escribe algunos ejemplos.

Competencias de pensamiento crítico y resolución de problemas

Pensamiento crítico

6. Manuel tomó una hoja de papel y la recortó por la mitad. Puso un trozo sobre el otro haciéndolos coincidir y recortó nuevamente por la mitad. Puso 2 de los trozos obtenidos sobre los otros 2 haciéndolos coincidir y recortó nuevamente por la mitad. Si en total hizo 6 cortes, ¿cuántos trozos iguales de papel obtuvo?

Radicación en los números naturales

La **radicación** es una operación **inversa** de la **potenciación**. Consiste en hallar la base cuando se conocen el exponente y la potencia. Los términos de la radicación son índice, radicando y raíz.

$$3^4 = 81$$

$$\text{índice} \longrightarrow \sqrt[4]{81} = 3 \longleftarrow \text{raíz}$$

radicando

Ejemplo

Hallemos las siguientes raíces.

a. $\sqrt[5]{1024}$

b. $\sqrt{196}$

EXPLICACIÓN:

Solución

a. $\sqrt[5]{1024}$ indica que 1024 es la quinta potencia de un número que debemos hallar, es decir, $1024 = \square^5$. Como $4^5 = 1024$, entonces $\sqrt[5]{1024} = 4$. En este caso el **índice** es **5**, el **radicando** es **1024** y la **raíz** es **4**. La expresión $\sqrt[5]{1024} = 4$ la leemos: la raíz quinta de 1024 es 4.

b. $\sqrt{196}$ es otra manera de escribir $\sqrt[2]{196}$. Cuando el índice es igual a 2, generalmente no se escrib

Para hallar $\sqrt{196}$ buscamos un número cuyo cuadrado sea 196, es decir, $196 = \square^2$.
Como $14^2 = 196$, entonces $\sqrt{196} = 14$. En este caso el **índice** es **2**, el **radicando** es **196** y la **raíz** es **14.** La expresión $\sqrt{196} = 14$ la leemos: la raíz cuadrada de 196 es 14.
Para hallar raíces podemos usar el método de ensayo y error. Veamos.

- Como $10^2 = 100$, es menor que 196, entonces la raíz buscada es mayor que 10.
- Como $15^2 = 225$ y 225 es mayor que 196, la raíz es menor que 15.
- Como $14^2 = 196$, entonces $\sqrt{196} = 14$.

Cuando el índice de una raíz es 3 se lee *raíz cúbica*.
Por ejemplo, $\sqrt[3]{8} = 2$ se lee: la raíz cúbica de 8 es igual a 2.

Desarrolla competencias

1. Resuelve cada operación y escríbela usando radicación.

a. 6^3

b. 8^2

c. 10^6

d. 3^5

2. Escribe cada operación usando potenciación.

a. $\sqrt[3]{729} = 9$

b. $\sqrt[5]{32\,768} = 8$

c. $\sqrt[6]{15\,625} = 5$

d. $\sqrt[2]{289} = 17$

3. Escribe en el espacio el número que falta.

a. $\square^3 = 64$

b. $\square^8 = 256$

c. $\square^2 = 324$

d. $\square^5 = 3125$

4. Determina si cada raíz es mayor que 10 o menor que 10. Luego, hállala.

a. $\sqrt[3]{512}$

b. $\sqrt{169}$

c. $\sqrt[3]{1331}$

d. $\sqrt[4]{4096}$

5. Halla cada raíz y escribe cuáles son el índice y el radicando.

a. Raíz cuadrada de 36

b. Raíz cúbica de 125

c. Raíz cuarta de 10 000

d. Raíz sexta de 729

6. Completa la tabla.

Índice	2	3	4	5	3
Radicando	225	216	81	32	27
Raíz				2	3

Competencias en TIC

7. La mayoría de calculadoras tienen una tecla para hallar raíces cuadradas. Si en una calculadora buscamos la tecla [√■] y digitamos [√■] [3] [2] [4] aparece 18 que es el resultado de $\sqrt{324}$. No todos los números naturales tienen como raíz cuadrada un número que también sea natural. Por ejemplo, $\sqrt{8}$ es un número que no es natural y está entre 2 y 3 porque $2^2 = 4$ y $3^2 = 9$.
Utiliza una calculadora para determinar cuáles de los siguientes números tienen como raíz cuadrada un número que no es natural.

a. $\sqrt{50}$

b. $\sqrt{361}$

c. $\sqrt{1089}$

d. $\sqrt{120}$

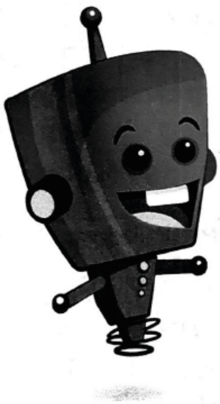
EJERCICIOS:

Logaritmación en los números naturales

La **logaritmación** es otra operación **inversa** de la **potenciación** que consiste en hallar el exponente (o logaritmo) cuando se conocen la base y la potencia. Se simboliza con la expresión log. Los términos de la logaritmación son base, argumento y logaritmo.

$$6^3 = 216$$

$$\log_{\underset{\text{base}}{6}} \underset{\text{argumento}}{216} = \underset{\text{logaritmo}}{3}$$



Ejemplo

Hallemos los siguientes logaritmos.

a. $\log_3 243$

b. $\log_5 125$

Solución

a. $\log_3 243 = \square$ es otra manera de escribir $3^{\square} = 243$. El logaritmo es el número desconocido, es decir, el exponente. Como $3^5 = 243$, entonces $\log_3 243 = 5$. En este caso la **base** es **3**, el **argumento** es **243** y el **logaritmo** es **5**.
La expresión $\log_3 243 = 5$ la leemos: el logaritmo en base 3 de 243 es 5.

b. Expresamos $\log_5 125$ usando potenciación y vemos que necesitamos hallar el exponente en la igualdad $5^{\square} = 125$. Como $5^3 = 125$, entonces el logaritmo es 3 y escribimos $\log_5 125 = 3$.
La expresión $\log_5 125 = 3$ la leemos: el logaritmo en base 5 de 125 es 3.

Desarrolla competencias

1. Resuelve cada operación. Luego, exprésala usando logaritmación.

a. 7^3

b. 9^4

c. 11^2

d. 4^5

2. Escribe cada operación usando potenciación.

a. $\log_7 2401 = 4$

b. $\log_8 512 = 3$

c. $\log_{10} 100\,000 = 5$

d. $\log_2 128 = 7$

EVALUACIÓN:

3. Escribe en el espacio el número que falta.

a. $3^{\square} = 81$

b. $5^{\square} = 25$

c. $10^{\square} = 1000$

d. $9^{\square} = 729$

4. Halla cada logaritmo.

a. logaritmo en base 2 de 8

b. logaritmo en base 12 de 144

c. logaritmo en base 8 de 4096 4

d. logaritmo en base 20 de 400

5. Completa la tabla.

Base	Argumento	Logaritmo
2	512	
3	27	
4	16	
	9	2
2		5

6. Escribe una operación (radicación o logaritmación) para expresar el número que falta y resuélvela. Observa el ejemplo.
$5^{\square} = 25$; $\log_5 25 = 2$.

a. $3^{\square} = 2187$

b. $\square^2 = 225$

c. $10^{\square} = 1\,000\,000$

d. $2^{\square} = 1024$

7. Halla $5^2, 5^3, 5^4, 5^5$ y 5^6.


Razonamiento lógico

a. ¿Qué característica especial observas en la cifra de las unidades de las anteriores potencias? ¿Hay algún otro número mayor que 1 y menor que 10 que cumpla esta propiedad?

b. ¿Es posible que la cifra de las unidades de alguna potencia de 9 sea igual a 3? ¿Por qué?

c. Si ✪ representa un número natural y $\log_4$ ✪ es un número par, ¿cuál es la cifra de las unidades de ✪?

Competencias de pensamiento crítico y resolución de problemas


Pensamiento crítico

8. Observa el ejemplo y completa la tabla.

Potenciación	Radicación	Logaritmación
La tercera potencia de 2 es 8	La raíz cúbica de 8 es 2	El logaritmo en base 2 de 8 es 3
El cuadrado de 18 es ___		
	La raíz quinta de 243 es ___	
		El logaritmo en base 7 de 49 es ___
		El logaritmo en base 2 de 128 es ___
El cubo de 9 es ___		

9. En su cumpleaños, Erika recibió un regalo que venía empacado en una caja muy grande. La abrió y vio que adentro venían 2 cajas más; al abrirlas, encontró dentro de cada una otras 2 cajas. Así siguió abriendo las cajas hasta que por fin encontró 2 dulces dentro de cada caja de las más pequeñas que tenía. Si en total había 32 dulces, ¿cuántas cajas abrió Erika?

Roberto compró un terreno que tiene de área 2352 metros cuadrados y lo dividió en 3 partes de igual área. Una de las partes la demarcó en forma cuadrada y la utilizó para construir una casa. El resto del terreno lo va a utilizar para sembrar. El terreno para los cultivos lo dividirá en 2 partes y aunque no ha decidido qué productos sembrar, tiene las siguientes opciones: en una parte habichuela o tomate y en la otra zanahoria, cebolla o espinaca.

Para los gastos de la construcción solicitó un préstamo en el banco y adquirió una deuda que debe pagar en cuotas mensuales de $ 235 500. Los primeros materiales que compró fueron: 6 bultos de cemento, 3 cargas de arena, 500 ladrillos y 5 cajas de 14 baldosas cada una.

Comunicación, representación y modelación

1. Roberto pagó $ 405 000 por los ladrillos que compró. ¿Cuánto cuesta cada ladrillo?

2. El número de baldosas que compró Roberto fue
   a. 5 baldosas
   b. 14 baldosas
   c. 54 baldosas
   d. 70 baldosas

3. Si cada ladrillo pesa un poco menos de 2 kilogramos, cada bulto de cemento pesa 55 kilogramos, cada carga de arena 40 kilogramos y cada caja de baldosas 23 kilogramos, ¿cuál es el peso aproximado de la primera carga de materiales que compró Roberto?

4. Los productos comprados ordenados según su peso total de menor a mayor son
   a. baldosas, arena, cemento, ladrillo
   b. arena, cemento, ladrillo, baldosas
   c. cemento, ladrillo, baldosas, arena
   d. arena, cemento, ladrillo, baldosas

5. El lado del terreno donde va a construir la casa mide
   a. 8 m
   b. 18 m
   c. 28 m
   d. 48 m

Razonamiento y argumentación

6. Si la incógnita d representa el dinero total que tiene que pagar Roberto por el préstamo y la incógnita m representa el número de cuotas mensuales, ¿cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la situación de la lectura?
   a. $235\,500 \times m = d$
   b. $235\,500 \times d = m$
   c. $235\,500 \div m = d$
   d. $d - m = 235\,500$

7. Una de las habitaciones es de forma cuadrada de 264 cm de lado y se cubrió totalmente con 64 baldosas. Para saber qué área cubre una baldosa, ¿podemos dividir 264 entre 64? Justifica tu respuesta y explica una manera de averiguar qué área cubre una baldosa.

Planteamiento y resolución de problemas

8. Para tapar algunos huecos pequeños que quedaron en el piso, un empleado cortó una baldosa por la mitad, luego cortó una de esas mitades por la mitad y así sucesivamente hasta que cada uno de los 2 trozos obtenidos al final fue 16 veces menor que la baldosa inicial. ¿Cuántos cortes hizo?

9. Si Roberto decide sembrar solo un producto en cada parte del terreno, ¿cuáles son las posibles parejas de alimentos que puede sembrar?

10. Después de pagar la cuota de febrero, Roberto había pagado en total $ 942 000. ¿En qué mes comenzó a pagar el préstamo?

BIBLIOGRAFÍA: