

PROPÓSITO:

GUÍA 10

Resuelve y formula problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como los números primos y compuestos, mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

MOTIVACIÓN:

Mínimo común múltiplo

Ideas previas

Julián y Tomás viven en Bogotá. Julián viajó a Ibagué y regresará a Bogotá cada 3 semanas. Tomás, que viajó a Duitama, regresará a Bogotá cada 4 semanas. Si ambos salen al tiempo de Bogotá, ¿cada cuánto se encontrarán en Bogotá? Después del primer viaje, ¿a los cuántos meses se encontrarán por segunda vez?

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números naturales es el menor de los múltiplos comunes, distinto de cero, de estos números. Se escribe en forma abreviada, así: m.c.m.

Ejemplo 1



Figura 19.1

María tiene cartulinas rectangulares amarillas, rojas y verdes del mismo ancho, pero de 15 cm, 20 cm y 12 cm de largo, respectivamente, y quiere armar una bandera como la que se muestra en la figura 19.1.

- ¿Qué medida como mínimo puede tener la bandera de largo?
- ¿Cuántas cartulinas necesita de cada color para formar la bandera?

Solución

Para calcular el largo de la bandera, debemos encontrar el **mínimo común múltiplo** de los números 15, 20 y 12. Para ello, realizaremos lo siguiente:

- Escribimos los múltiplos de 15, 20 y 12.
 $M_{15} = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135 \dots\}$
 $M_{20} = \{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140 \dots\}$
 $M_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132 \dots\}$
- Hallamos la intersección entre los tres conjuntos de múltiplos.
 $M_{15} \cap M_{20} \cap M_{12} = \{0, 60, 120 \dots\}$
- Escogemos el menor de los múltiplos comunes, diferente de cero, en este caso, 60. Este número es el mínimo común múltiplo de 15, 20 y 12 y lo simbolizamos así: m.c.m. (15, 20, 12) = 60.

Por tanto, la longitud mínima del largo de la bandera es 60 cm.

Para saber con cuántas cartulinas se puede formar cada franja, dividimos. $60 \div 15 = 4$; $60 \div 20 = 3$; y $60 \div 12 = 5$. Así, para la franja amarilla necesita 4 cartulinas; para la franja roja, 3; y para la franja verde, 5.

Hay casos en los que hallar el m.c.m. utilizando conjuntos no es práctico. Por eso, es importante tener un método más eficaz. A continuación, presentamos el método basado en la descomposición en factores primos.

Paso 1. Descomponemos cada número en factores primos.

Paso 2. Elegimos los factores no comunes y los comunes con mayor exponente.

Paso 3. Multiplicamos entre sí los factores seleccionados.

EXPLICACIÓN:

Ejemplo 2

Hallemos el m.c.m. (1400, 2250) por descomposición en factores primos.



Solución

Paso 1. Descomponemos en factores primos cada número.

1400	2	2250	2
700	2	1125	3
350	2	375	3
175	5	125	5
35	5	25	5
7	7	5	5
1		1	

$$1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7 \quad 2250 = 2 \times 3^2 \times 5^3$$

Paso 2. Elegimos los factores no comunes, que son 7 y 3^2 . Luego, elegimos los factores comunes con el mayor exponente, que resultan ser 2^3 y 5^3 .

Paso 3. Multiplicamos entre sí los factores elegidos, así:

$$7 \times 3^2 \times 2^3 \times 5^3 = 7 \times 9 \times 8 \times 125 = 63\,000$$

Por tanto, m.c.m. (1400, 2250) = 63 000.

Ejemplo 3

Determinemos el m.c.m. (a, b) si $a = 2^4 \times 3^2$ y $b = 3 \times 11$.



Solución

Paso 1. Podemos omitir este paso, puesto que la descomposición en factores primos de los números a y b ya está hecha. En este caso, $a = 2^4 \times 3^2$ y $b = 3 \times 11$.

Paso 2. Los factores no comunes son 2^4 y 11. El factor común con mayor exponente es 3^2 .

Paso 3. Multiplicamos los factores elegidos, así: $2^4 \times 11 \times 3^2 = 16 \times 11 \times 9 = 1584$.



Por tanto, m.c.m. (a, b) = 1584.

Desarrolla competencias

Trabajo colaborativo

1. Explica a un compañero o compañera si es posible hallar el mínimo común múltiplo de un número.
2. Explícale a uno de tus compañeros o compañeras con un ejemplo cómo se obtiene el mínimo común múltiplo utilizando conjuntos.
3. Explícale a uno de tus compañeros o compañeras con un ejemplo cómo se obtiene el mínimo común múltiplo de dos o más números aplicando la descomposición en factores primos.
4. ¿Por qué crees que es más práctico el método de descomposición en factores primos que el método de conjuntos para hallar el m.c.m.?
5. Halla el m.c.m. de los números propuestos utilizando conjuntos.

a. 12 y 18	b. 15 y 20
c. 7 y 9	d. 12 y 8
e. 8 y 6	f. 9, 4 y 12
g. 6, 9 y 12	h. 26, 39 y 13
6. Halla el m.c.m. de los números indicados utilizando el método de descomposición en factores primos.

a. 48 y 72	b. 54 y 75
c. 100 y 240	d. 441 y 252
e. 63 y 81	f. 15, 24 y 30
g. 198 y 323	h. 40, 60 y 80
i. 252, 168 y 147	j. 180, 120 y 90

EJERCICIOS:

Razonamiento lógico

7. Determina si cada afirmación es verdadera o falsa. Justifica y escribe dos ejemplos.
- El m.c.m. de dos o más números es mayor que cada uno de ellos.
 - El m.c.m. de dos números, en el que uno es múltiplo del otro, es igual al número que es múltiplo.
 - El m.c.m. de un grupo de números que no son primos y que no tienen factores comunes es igual al producto de ellos.
 - Si dos números son primos, el m.c.m. es igual al producto de ellos.
 - El m.c.m. de un número par y otro impar es algunas veces par.

Competencias en TIC

8. Utiliza una calculadora para hallar el m.c.m. (x , z).
- $x = 2^2 \times 5^2 \times 7^2$ $z = 2^3 \times 3^2 \times 7$
 - $x = 3^2 \times 5^3 \times 13^2$ $z = 3^2 \times 5^2 \times 13$
 - $x = 2 \times 3^2 \times 5^2$ $z = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11$
 - $x = 2^4 \times 3^3 \times 11^2$ $z = 2^3 \times 7 \times 11$
 - $x = 2^2 \times 7^2 \times 17$ $z = 3 \times 7^2 \times 13$
 - $x = 2 \times 5^2 \times 13^2$ $z = 5^3 \times 7 \times 11 \times 13^2$
9. Realiza varias veces los siguientes pasos y escribe una conclusión.
- 1.º Escribe un número en la calculadora.
 - 2.º Multiplícalo por 10.
 - 3.º Réstale un múltiplo de 9 menor que 90.
 - 4.º Adiciona las cifras del número obtenido.
 - 5.º Compara el resultado obtenido con el número pensado.

Pensamiento crítico y resolución de problemas

10. Una ruta aérea llega a una ciudad cada 6 días y otra ruta llega cada 8 días. Si coincidieron el 31 de enero, ¿cuál será la próxima fecha en que coincidirán?

11. Un paquete de jamón trae 18 tajadas y un paquete de queso, 34 tajadas. ¿Cuántos paquetes de jamón y de queso se deben comprar para tener la misma cantidad de tajadas de cada producto?
12. Ana está remodelando la casa, pero no quiere que estén el mismo día el pintor, el albañil y el carpintero. Entonces, dispone un número de días para que vaya cada uno de los trabajadores, así: cada 2 días el albañil, cada 5 días el carpintero y cada 8 días el pintor. A pesar de la organización, los trabajadores se encontrarán. ¿Cuántos días deben pasar para que se encuentren los tres trabajadores?
13. En el hipódromo, tres caballos compiten y parten al mismo tiempo: el primero gasta 18 segundos en dar cada vuelta, el segundo tarda 24 segundos y el tercero, 36 segundos. ¿Cuántos segundos deben pasar para que los tres pasen al mismo tiempo por la meta?
14. En un pueblo, hay 3 rutas de buses: de la ruta *Cootra*, sale un bus cada 20 minutos; de la ruta *Los rápidos*, cada 90 minutos y de *Las carmelas*, cada 45 minutos. Si todas las rutas salen a las 6:00 a.m., ¿a qué hora volverán a salir las tres rutas al mismo tiempo? ¿Cuántas rutas de cada una habrán salido en ese momento?
15. Tres viajeros siempre se hospedan en el mismo hotel cuando llegan a la ciudad de Quito y en esta ocasión se encontraron el día 2 de julio. Si Pedro llega cada 12 días al hotel, Juan cada 15 y Andrés cada 10, ¿cuándo se volverán a encontrar en el hotel?
16. Todos los cursos de un colegio cuentan con menos de 44 estudiantes. En uno de los salones, los estudiantes se pueden distribuir exactamente en grupos de 4, 5 u 8 estudiantes. ¿Cuántos estudiantes hay en el curso?

Resumen

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números naturales es el **menor** de los **múltiplos comunes**, distinto de cero, de estos números. Se escribe en forma abreviada m.c.m.



Evaluación digital

EVALUACIÓN:

Evalúa tus competencias

Competencias en el Manejo de la información

Una de las características de los videojuegos que más atraen a quienes los juegan son los estímulos que contienen. Uno de estos estímulos es el sistema de trofeos, en el cual cada jugador recibe un puntaje específico por algún tipo de misión que lleve a cabo dentro del juego. En general, los tipos de trofeos disponibles y las condiciones que se deben cumplir para obtenerlos varían según el juego.

En uno de estos juegos, los trofeos son de bronce, plata, oro y platino. El trofeo de bronce asigna 3 puntos; el de plata, 5 puntos; el de oro, 12 puntos; y con el casi inalcanzable platino, se obtienen 30 puntos.



El juego consta de cinco niveles. Si el jugador desea subir de nivel, debe acumular un determinado puntaje. No importa el tipo de trofeos que acumule. Los puntajes por nivel se muestran en la tabla 4.1.

Nivel	Puntaje necesario
1	50
2	200
3	600
4	1000
5	1800

Tabla 4.1

Interpretación y representación

1. ¿Cuántos trofeos de un solo tipo se requieren como mínimo para acceder al primer nivel?
2. Daniel llegó al tercer nivel y obtuvo trofeos de platino y de plata. Escribe cuatro posibles combinaciones de los trofeos que ganó Daniel para llegar a este nivel.

Razonamiento y argumentación

3. En su primer juego, Sandra alcanzó el puntaje mínimo para ubicarse en el segundo nivel. Si se sabe que obtuvo trofeos de un solo tipo, ¿qué clase de trofeos obtuvo? Justifica tu respuesta.

4. Responde las siguientes preguntas y justifica tus respuestas.
 - a. ¿Qué tipo de trofeo puede reemplazarse por trofeos de otro tipo para obtener el mismo puntaje?
 - b. ¿Por qué algunos no se pueden reemplazar?
5. Observa los niveles de la tabla 4.1. Especifica cuáles se pueden alcanzar con trofeos de
 - a. bronce.
 - b. plata.
 - c. oro.
 - d. platino.

BIBLIOGRAFÍA:

Formulación y ejecución

6. Ángela acumuló 300 puntos, pero no recuerda cómo obtuvo ese puntaje. Para ayudarla, Julián realizó el procedimiento que se muestra en la figura 4.1 y concluyó que Ángela obtuvo este puntaje con 25 trofeos de oro.

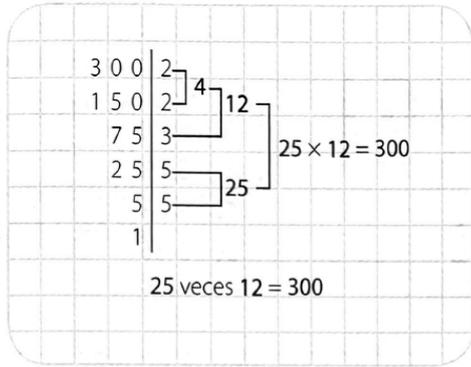


Figura 4.1

Utiliza este procedimiento para determinar con cuántos trofeos de platino se logra llegar al nivel 5.

7. Explica el procedimiento para determinar si un puntaje se obtuvo solo con trofeos de platino.

8. Ana, Luis, Jaime y Laura ganaron únicamente trofeos de un mismo tipo, pero entre ellos no coincidieron en el tipo de trofeo. Si todos obtuvieron más de 200 puntos, ¿cuál es el puntaje en el que coincidieron los 4 jugadores por primera vez?
9. María obtuvo 204 puntos, Daniela 276 puntos y Carlos 168 puntos. Todos los puntos se obtuvieron con un mismo tipo de trofeo. Si en los tres casos el puntaje se obtuvo con la menor cantidad posible de trofeos, ¿cuál es el tipo de trofeo que ganaron los jugadores?



10. Propón un criterio de divisibilidad que te permita asegurar que un puntaje se obtuvo solo con trofeos de oro.

Punto	Desempeño	Sí	No
1.	Aplico el concepto de división.		
2.	Entiendo y aplico el concepto de múltiplo de un número.		
3.	Aplico criterios de divisibilidad.		
4.	Diferencio números primos de números compuestos.		
5.	Reconozco los divisores de un número natural.		
6.	Descompongo un número en sus factores primos.		
7.	Comprendo el concepto de múltiplo de un número natural.		
8.	Resuelvo problemas que involucran el mínimo común múltiplo.		
9.	Resuelvo problemas que involucran el máximo común divisor.		
10.	Propongo criterios de divisibilidad con base en condiciones dadas.		