PROPÓSITO:

GUÍA 09

Resuelve y formula problemas utilizando propiedades ba?sicas de la teori?a de nu?meros, como los números primos y compuestos, mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

MOTIVACIÓN:

Números primos y números compuestos. Factorización prima

Ideas previas

Claudia tiene dos láminas de vidrio: una de 250 cm de largo y 100 cm de ancho, y otra de 91 cm de ancho y 100 cm de largo. ¿Cuál es el ancho de los vidrios rectangulares que podrá cortar de cada una de las láminas si cada vidrio debe medir 50 cm en uno de los lados y, además, no desea desperdiciar vidrio?

Para recordar

Si se representa con arreglos rectangulares un número primo, solo se tienen dos opciones, mientras que un número compuesto tiene más de dos representaciones (*ver* figura 17.1).

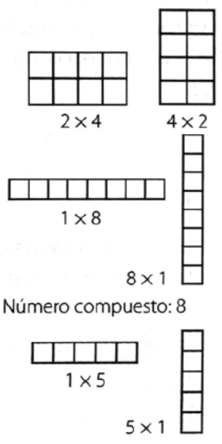


Figura 17.1

A un carpintero se le pide que corte en pedazos de igual longitud dos listones de madera de 24 cm y 17 cm de largo. ¿Cuál es la longitud de los pedazos que pueden obtenerse de cada listón?

a. El carpintero puede cortar el listón de 24 cm de longitud en
24 pedazos de 1 cm, 12 pedazos de 2 cm, 8 pedazos de 3 cm,
6 pedazos de 4 cm, 4 pedazos de 6 cm, 2 pedazos de 12 cm,
1 pedazo de 24 cm

b. El carpintero puede cortar el listón de 17 cm de longitud en
17 pedazos de 1 cm, 1 pedazo de 17 cm

Las posibles longitudes de los pedazos que puede obtener de cada listón corresponden a los divisores de la longitud total de cada uno. Por ejemplo, los divisores de 24 son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24, y los divisores de 17 son solo 1 y 17.

> Un número natural distinto de cero, que tiene más de dos divisores diferentes, se denomina **número compuesto**.
> Un número natural que tiene exactamente dos divisores diferentes (la unidad y el mismo número) se denomina **número primo**.

Podemos escribir el número 24 como producto de números menores que él, por ejemplo, $24 = 2 \times 12$ o $24 = 8 \times 3$. El número 17 solo podemos escribirlo como $17 = 17 \times 1$ o $17 = 1 \times 17$.

> Un número compuesto siempre puede escribirse como producto de números menores que él. Un número primo sólo puede escribirse como producto de la unidad y de él mismo.

Para recordar

No existe un criterio para saber si un número es o no primo. Se han diseñado programas de computador que los detectan. Sin embargo, a medida que se avanza en el conjunto de los números naturales, es más difícil encontrarlos. Se sabe que son infinitos.

Ejemplo 1

Hallemos los divisores de cada número. Luego, clasifiquemos cada número en primo o compuesto.

49 51 97 109

Solución

Número	Divisores	Clasificación
49	1, 7, 49	Compuesto
51	1, 3, 17, 51	Compuesto
97	1, 97	Primo
109	1, 109	Primo

Tabla 17.1

EXPLICACIÓN:

Ejemplo 2

Las dimensiones de un rectángulo son los números naturales x y z. Si el área del rectángulo es 18 cm^2, ¿cuáles son los posibles valores de x y z?

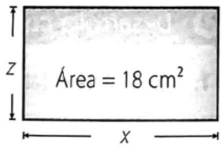


Figura 17.2

Solución

Como el área de un rectángulo se puede hallar multiplicando las longitudes del largo y el ancho, podemos escribir $18 = x \times z$. Pero $18 = 6 \times 3 = 9 \times 2 = 18 \times 1$, por tanto, los posibles valores para x y z son $x = 6$ cm y $z = 3$ cm, $x = 9$ cm y $z = 2$ cm o $x = 18$ cm y $z = 1$ cm.

Todo número compuesto puede escribirse como el producto de factores primos en forma única, excepto por el orden en el que pueden estar los factores. Esta es la **factorización prima**. Dicha factorización se puede obtener por medio de varios procedimientos, entre ellos, los siguientes: el diagrama de árbol y las divisiones sucesivas.

Ejemplo 3

Expresemos en factores primos el número 60 utilizando un diagrama de árbol y realizando divisiones sucesivas.

Solución

Con un diagrama de árbol

- Buscamos dos números cuyo producto sea 60.
- Hallamos otros dos factores para cada uno de los factores anteriores.
- Repetimos este proceso hasta obtener solo factores primos.

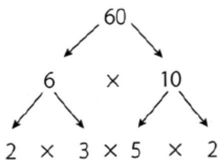


Figura 17.3a

Para obtener la descomposición, también podemos realizar el diagrama de la figura 17.3b.

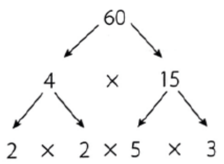


Figura 17.3b

En los diagamas de las figuras 17.3a y 17.3b, obtuvimos que $60 = 2 \times 3 \times 5 \times 2 = 2 \times 2 \times 5 \times 3 = 2^2 \times 3 \times 5$.

Con divisiones sucesivas

- Escribimos el número 60 y trazamos una raya vertical al lado derecho, que indica división.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

- Buscamos el menor número primo que divida exactamente a 60, en este caso, 2. Dividimos 60 entre 2 y ubicamos el cociente 30 debajo de 60.
- Buscamos el menor número primo que divida exactamente a 30 y obtenemos 2. Dividimos 30 entre 2 y ubicamos el cociente 15 debajo de 30. Repetimos este proceso hasta que el cociente sea 1.
- Expresamos 60 como el producto de todos los factores primos que están a la derecha de la raya vertical, así: $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$.

Ejemplo 4

a. Hallemos la factorización prima del número 1155.

b. Calculemos el número que tiene por descomposición prima $3^4 \times 5^2$.

Solución

a. Encontramos que por divisiones sucesivas $1155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$.

b. Realizamos el producto de los factores primos y encontramos el número correspondiente.
$3^4 \times 5^2 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 2025$

Desarrolla competencias

1. Completa la tabla 17.2.

Número	Divisores	Clasificación
20		
19		
55		
69		
83		
95		
97		
101		

Tabla 17.2

2. Eratóstenes ideó un método para hallar los números primos entre 1 y 100. El método consiste en escribir la lista de los números de 1 a 100. Luego, se eliminan los números por etapas, así: los números pares, excepto el 2; los números que sean múltiplos de 3, excepto el 3; los múltiplos de 5, excepto 5; los múltiplos de 7, excepto el 7; finalmente, los múltiplos de 11, excepto el 11. Los números que quedan son los primos buscados.

- **a.** ¿Cuáles son estos números?
- **b.** ¿Cuántos son?
- **c.** ¿En cuánto difiere la cantidad de números compuestos con respecto a la cantidad de números primos que hay entre 1 y 100?
- **d.** Se denominan números primos gemelos a los pares de números primos que son impares consecutivos: 3 y 5, 11 y 13 son primos gemelos. Escribe todos los primos gemelos que hay entre 20 y 100.

3. Escribe en cada caso dos números compuestos que tengan como factores a los números indicados.

- **a.** 4 y 7
- **b.** 5 y 11
- **c.** 3, 7 y 9
- **d.** 18 y 5
- **e.** 2, 17 y 23
- **f.** 11, 3 y 19

4. Verifica la siguiente conjetura mínimo con cinco ejemplos.
"Todo número par mayor que 2 se puede expresar como la suma de dos números primos."

5. Busca un ejemplo que muestre la falsedad de cada afirmación.

- **a.** Todos los números compuestos son pares.
- **b.** Todos los números primos son impares.
- **c.** Todos los números impares son primos.
- **d.** La suma de dos números primos es un número primo.
- **e.** La suma de dos números compuestos es un número compuesto.

6. Escribe en cada caso los números que cumplen las condiciones.

- **a.** Dos números primos cuyo producto sea un número par
- **b.** Dos números compuestos tal que uno sea factor del otro
- **c.** Dos números primos cuya diferencia sea primo
- **d.** Cinco números primos entre 70 y 90

7. Encuentra los posibles valores de las variables para que la igualdad se cumpla.

- **a.** $35 = m \times t$
- **b.** $50 = k \times d$
- **c.** $90 = s \times t \times u$
- **d.** $56 = r \times p \times n$

8. Halla las posibles dimensiones de cada rectángulo de la figura 17.4.

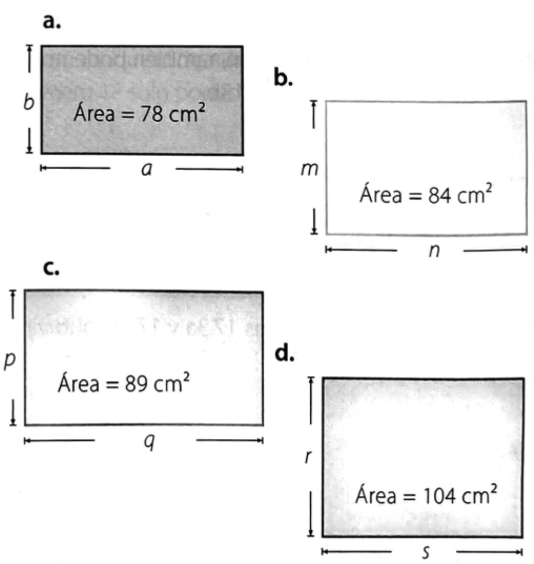


Figura 17.4

EJERCICIOS:

9. Completa cada diagrama de descomposición en factores primos.

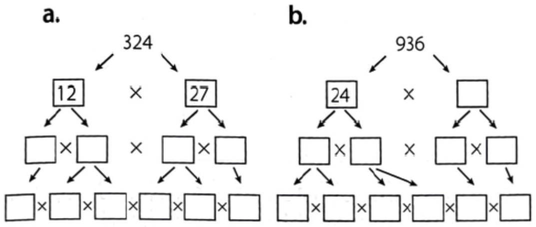


Figura 17.5

Trabajo colaborativo

10. Utiliza un diagrama de árbol para descomponer cada número en factores primos y exprésalo como producto de estos. Compara tus respuestas con las de un compañero o compañera.

a. 72 **b.** 100 **c.** 125
d. 270 **e.** 648 **f.** 3465

11. Utiliza el método de divisiones sucesivas para descomponer cada número en sus factores primos.

a. 450 **b.** 128 **c.** 112
d. 735 **e.** 484 **f.** 130
g. 221 **h.** 137 **i.** 236

Razonamiento lógico

12. Combina los números 1, 2 y 5 para formar números de 3 cifras que no tengan cifras repetidas. De los números que obtuviste, ¿cuáles son compuestos?

13. Explica cómo puedes utilizar la descomposición en factores primos de un número para hallar todos sus divisores.

Pensamiento crítico y resolución de problemas

14. Lucrecia tiene una cinta de la bandera de Colombia de 800 cm y quiere hacer lazos de igual longitud para la izada de bandera del colegio. Si el pedazo de cinta para el lazo debe ser mínimo de 15 cm, ¿cuántos lazos puede hacer de 15 cm y cuántos de 20 cm? Si resultaron 50 lazos, ¿cuántos centímetros mide cada pedazo de cinta?

15. Un electricista trabaja en un nuevo circuito. Para su diseño, debe dividir cada alambre en pedazos de igual longitud. Escribe en frente de cada alambre la longitud de los pedazos en que se puede dividir.

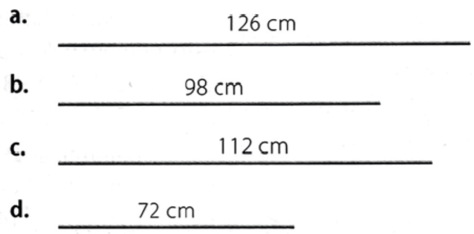
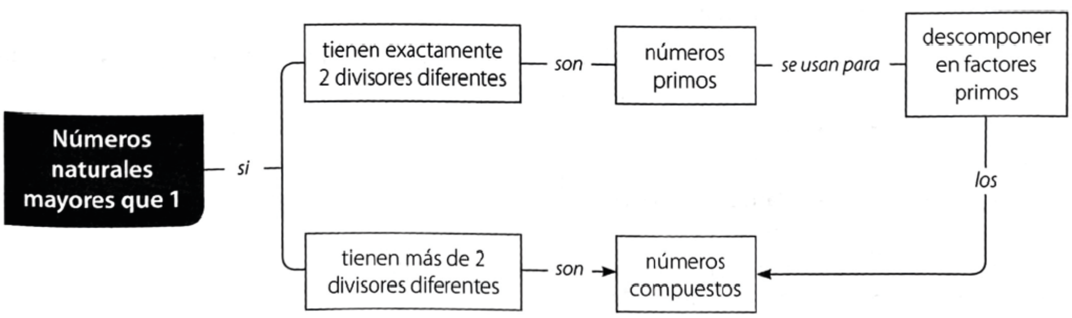


Figura 17.6

16. Giovanna quiere comprar un lote. Ha visto anuncios de lotes de forma rectangular de 117 m^2, 152 m^2, 90 m^2 y 2175 m^2. En el anuncio, no dan las medidas de frente ni de fondo. Encuentra todas las posibles dimensiones de cada lote.

17. Se arman cajas de 450 cm^3, 54 cm^3, 109 cm^3, 642 cm^3 y 63 cm^3. ¿Cuáles pueden ser las medidas de cada caja?

Resumen



Evaluación digital

Máximo común divisor

Ideas previas

Antonio tiene dos cuerdas de alambre para cercar unos lotes: una cuerda mide 32 m y la otra, 84 m de longitud. Él las va a cortar en pedazos iguales de la mayor longitud posible. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo?

En qué se aplica

El concepto de máximo común divisor se utiliza en diversos oficios, por ejemplo, en la modistería. En este oficio, se puede presentar la necesidad de cortar una tela rectangular en trozos cuadrados, de tal manera que se desperdicie la menor cantidad posible de material. Se trata de dividir tanto el largo como el ancho en pedazos de igual longitud, pero de la mayor longitud posible.

El **máximo común divisor** de dos o más números naturales es el mayor de los divisores comunes de estos números. Se escribe en forma abreviada, así: m.c.d.

Ejemplo 1

Hallemos el máximo común divisor de 28 y 42.

Solución

Una manera de hallar el m.c.d. de dos o más números es utilizando conjuntos. Para esto, primero hallamos los divisores de cada número.

$D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$

$D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$

Luego, determinamos la intersección de esos conjuntos, es decir, hallamos los divisores comunes de 28 y 42.

$D_{28} \cap D_{42} = \{1, 2, 7, 14\}$

El mayor divisor común es 14. Entonces, escribimos así: m.c.d. (28, 42) = 14.

Cuando los números son mayores, es poco práctico hallar el conjunto de divisores. En este caso, utilizamos un método más rápido, que consiste en la descomposición en factores primos. A continuación, explicaremos el método.

Paso 1. Descomponemos cada número en factores primos.

Paso 2. Elegimos los factores comunes elevados a su menor exponente.

Paso 3. Multiplicamos los factores elegidos.

Ejemplo 2

Gustavo heredó 2 lotes: uno de 120 m^2 (10 m × 12 m) y otro de 384 m^2 (16 m × 24 m). Quiere dividirlos en parcelas de igual área. ¿Cuál es la mayor área posible de las parcelas? ¿Cuántas parcelas obtendrá de cada lote si se dejan con la mayor área posible?

Solución

Para solucionar el problema, hallamos el m.c.d. de los números 120 y 384 utilizando el método de descomposición en factores primos.

- **Paso 1.** Descomponemos cada número en factores primos.
  $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ $\quad$ $384 = 2^7 \times 3$
- **Paso 2.** Elegimos los factores comunes elevados a su menor exponente.
  En este caso, son 2^3 y 3.
- **Paso 3.** Multiplicamos los factores elegidos.
  $2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$.
  Entonces, escribimos así: m.c.d. (120, 384) = 24.

EVALUACIÓN:

De esta manera, la mayor área posible de cada parcela es de 24 m^2. Del lote de menor área, saldrán 5 parcelas y del de mayor área, 16.

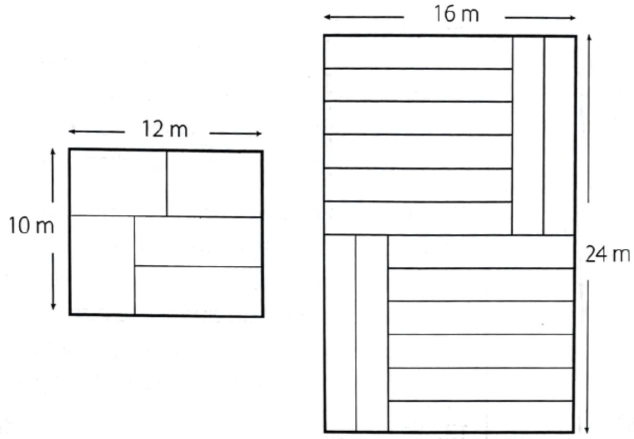


Figura 18.1

Ejemplo 3

Calculemos el m.c.d. de $2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$; $2^2 \times 5 \times 11$; y $2^3 \times 5 \times 13$.

Solución

Paso 1. Podemos omitir este paso, porque los números están descompuestos en factores primos.

Paso 2. Los factores primos comunes, de las tres expresiones, elevados a su menor exponente son 2 y 5.

Paso 3. El producto de los factores elegidos es $2 \times 5 = 10$. Luego, el m.c.d. de los números dados es 10.

Desarrolla competencias

Trabajo colaborativo

1. Explícale a un compañero o compañera si es posible hallar del máximo común divisor de un número.
2. Explícale a un compañero o compañera, mediante un ejemplo, el proceso para obtener el máximo común divisor de dos o más números utilizando conjuntos.
3. Utiliza un ejemplo para explicarle a un compañero o compañera el proceso para obtener el máximo común divisor de dos o más números mediante la descomposición en factores primos.
4. Explica qué entiendes por mínimo común divisor de dos o más números. Encuentra el mínimo común divisor de varias parejas de números y escribe una conclusión.
5. Encuentra el m.c.d. de los números indicados utilizando conjuntos.
   - **a.** 24 y 36 **b.** 30 y 40
   - **c.** 45 y 60 **d.** 21 y 49
   - **e.** 50 y 35 **f.** 27, 18 y 36
   - **g.** 12, 18 y 24 **h.** 27, 45 y 30
6. Halla el m.c.d. de los números indicados utilizando el método de descomposición en factores primos.
   - **a.** 96 y 144 **b.** 81 y 108
   - **c.** 300 y 720 **d.** 63 y 36
   - **e.** 216 y 900 **f.** 378 y 441
   - **g.** 198 y 363 **h.** 40, 60 y 80
   - **i.** 252, 168 y 147 **j.** 540, 360 y 270

7. Halla el m.c.d. a partir de las descomposiciones en factores primos dadas.

a. $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ y $3 \times 5^2 \times 11$

b. $3^4 \times 5^2 \times 13$ y $3 \times 5^3 \times 13^2$

c. $2 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$ y $7^2 \times 5 \times 3 \times 3$

8. Halla el m.c.d de cada grupo de números por el método de descomposición en factores primos.

a. 245, 126 y 136

b. 421 y 128

c. 715, 121 y 542

d. 465, 854 y 993

¿Qué tienen en común los resultados?

Razonamiento lógico

9. Determina si cada afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta y escribe dos ejemplos.

a. El m.c.d. de dos o más números es mayor que cada uno de ellos.

b. El m.c.d. de dos números en el que uno es divisor del otro es igual al número que es divisor.

c. El m.c.d. de un grupo de números no primos y que no tienen factores comunes es igual al producto de ellos.

d. Si dos números son primos, el m.c.d. es igual a 1.

e. El m.c.d. de un número par y otro impar es algunas veces par.

10. Dos números naturales se llaman **primos relativos** si el máximo común divisor entre ellos es 1. Determina cuáles parejas de números son primos relativos.

a. 144 y 88

b. 200 y 169

c. 75 y 81

Pensamiento crítico y resolución de problemas

11. Dos cuerdas de 72 cm y 60 cm se deben dividir en pedazos de igual longitud y sin desperdiciar. ¿Cuál es la mayor longitud común en que se pueden dividir?¿Cuántos pedazos resultan de cada cuerda?

12. Se tienen 64 bultos de maíz, 56 bultos de trigo y 36 de fríjol para repartir entre varios hogares. Se forman grupos con el mismo número de bultos, sin mezclarlos y sin que sobre ninguno. ¿Cuántos hogares recibirán los bultos? ¿Cuántos bultos de cada tipo le corresponden a cada hogar?

13. Se necesita cortar tres rollos de cuerda de 300 m, 15 m y 45 m en tiras de igual longitud, sin desperdiciar y la mayor cantidad posible. ¿Cuál es la longitud de cada tira? ¿Cuántas tiras resultan?

14. Hay 24 estudiantes en sexto A, mientras que en sexto B hay 28. Cada grupo se va a distribuir en equipos con el mismo número de integrantes. ¿Cuál es el máximo número de estudiantes que puede tener cada equipo si se quiere que todos los equipos tengan el mismo número de integrantes en los dos cursos?

15. El salón comunal de un conjunto residencial es un rectángulo que tiene 150 m de largo y 100 m de ancho. Se quiere cubrir el piso con baldosas cuadradas.

a. ¿Cuánto mide el lado de cada baldosa si se desea utilizar la baldosa más grande posible?

b. ¿Cuántas baldosas se necesitan?

16. En una frutería hay 45 peras, 60 manzanas y 30 naranjas. Se quiere formar grupos con el mismo número de frutas, pero sin mezclarlas y sin que sobre alguna. ¿Cuál es el mayor número posible de frutas que puede tener cada grupo?

Resumen

El máximo común divisor de dos o más números naturales es el mayor de los divisores comunes de estos números. Se escribe en forma abreviada m.c.d.

Evaluación digital

BIBLIOGRAFÍA: